# ACADÉMIE DES SCIENCES.

## SÉANCE DU LUNDI 9 MARS 1942.

PRÉSIDENCE DE M. ERNEST ESCLANGON.

---

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

### DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie le décès, survenu le 3 mars 1942, à Paris, de M. **Paul Marchal**, Membre de la Section d'Anatomie et Zoologie.

*Notice sur* Paul Marchal, par M. **Charles Pérez.**

La mort vient de nous arracher **Paul Marchal**, et c'est le cœur empli d'une immense tristesse que j'apporte le suprême hommage de l'Académie des Sciences à la mémoire de ce grand naturaliste.

Dès ses premières publications, qui datent déjà d'un demi-siècle, Paul Marchal se révélait comme un observateur d'une perspicacité exceptionnelle. Dans sa Thèse de médecine, consacrée à la désassimilation de l'azote chez les Invertébrés, il montre l'acide urique souvent remplacé par des corps chimiques tout différents, une leucomaïne chez les Sangsues, l'acide carcinurique chez les Crustacés. Dans sa Thèse de doctorat ès sciences sur l'anatomie des organes excréteurs chez les Crustacés Décapodes, il apporte, avec des moyens nouveaux de technique opératoire, une foule de faits insoupçonnés, comme l'existence du labyrinthe et des volumineuses vessies urinaires des Crabes et des Bernard-l'Ermite.

Mais il ne s'attarde pas à ces recherches de zoologie marine : sa vraie vocation, déclarée dès l'enfance, est l'étude des Insectes; un hasard administratif va la favoriser : deux ans après sa Thèse, il est appelé à l'emploi nouveau de Chef des travaux à la Station Entomologique créée par le Ministère de l'Agriculture, puis chargé du cours et bientôt titulaire de la

Chaire de Zoologie appliquée à l'Agriculture à l'Institut National Agronomique. C'est dans ces mêmes fonctions que se déroulera toute sa féconde carrière, en même temps que dans son jardin personnel d'Antony, qui fut son champ permanent d'expériences et son véritable laboratoire.

Il consacre bientôt à la reproduction des Guêpes un Mémoire plein d'aperçus ingénieux. Chez ces Insectes, dont la société est moins évoluée que la ruche des Abeilles, il existe entre la mère fondatrice et les ouvrières totalement stériles une série d'intermédiaires, de fécondité inégalement réduite, et qui sont éventuellement capables de pondre des œufs. Marchal a montré que la présence dans le nid d'une reine activement féconde est la condition déterminante de la stérilité des ouvrières, physiologiquement épuisées par leurs fonctions de nourrices du couvain; c'est ce qu'il a appelé la *castration nutriciale*.

Dans ce Mémoire, où il examine d'une manière très suggestive l'origine évolutive des sociétés d'Insectes, P. Marchal a écrit : « La présence du mystérieux dans un ordre de faits est un présage certain de nouvelles découvertes réservées pour l'avenir. » C'est sans doute la formule du secret magique utilisé par lui-même pour être conduit à ses magnifiques trouvailles.

De multiples mystères entouraient la reproduction d'un minuscule Hyménoptère Chalcidien, l'*Ageniaspis*, parasite d'une Chenille, l'Hyponomeute du Fusain sauvage. Paul Marchal les a simultanément résolus par une observation décisive qui avait échappé à tous ses devanciers et établi la réalité incontestable d'une histoire évolutive déconcertante qui reste une des merveilles de l'Entomologie.

C'est dans l'œuf récemment pondu par le Papillon que la femelle d'*Ageniaspis* inocule elle-même un seul œuf; mais ce germe unique, au lieu de se différencier aussitôt, prolifère en cellules banales, puis se morcelle en cent à deux cents fragments dont chacun donnera plus tard un embryon complet et finalement un Insecte parfait. Tous ces frères jumeaux multiples sont du même sexe, parce que le sexe a été fixé au moment même de la ponte de l'œuf, femelle ou mâle suivant que l'œuf a été fécondé ou non, et que ce sexe se maintient à travers tous les morcellements de cet œuf. Cette découverte sensationnelle eut dans le monde entier un grand retentissement. Au processus si remarquable qu'il a appelé *polyembryonie* le nom de Paul Marchal reste attaché pour toujours. Ce fut sans doute le titre principal qui lui ouvrit dès 1912 les portes de l'Académie des Sciences.

Dans cette brève Notice, où je ne puis qu'effleurer à peine les sommets,

je me contenterai d'une allusion rapide à tant d'autres Mémoires magnifiques sur les larves étranges des *Platygaster* et sur les galles à cellules géantes qu'elles déterminent dans les ganglions nerveux de leurs hôtes, sur le développement d'autres Hyménoptères parasites comme les *Trichogramma*, sur la métamorphose des femelles et l'hypermétamorphose des mâles chez les Cochenilles *Margarodes*, sur le cycle des *Chermes*, Pucerons cécidogènes des Conifères et le curieux phénomène de *spanandrie*, c'est-à-dire de raréfaction des mâles, qui entraîne chez ces Insectes la disparition progressive de la reproduction sexuée.

Je dois cependant m'arrêter un instant à l'ensemble de travaux que P. Marchal a consacrés à la biologie des Pucerons. Un groupe d'espèces, les Eriosomiens, sont foncièrement parasites des Ormes, où ils déterminent des galles caractéristiques; mais ils sont susceptibles d'émigrer à la belle saison sur des plantes toutes différentes et de s'y propager temporairement sous forme de générations parthénogénétiques, pour revenir en sens inverse à l'Orme, où s'accomplit avant l'hiver la reproduction sexuée. L'origine de ce groupe est à rechercher dans des espèces dont tout le cycle s'accomplit, sans migration, sur l'Orme, et l'on peut envisager comme terme de son évolution la ségrégation d'espèces perdant leur reproduction sexuée par absence de l'Orme et arrivant à subsister indéfiniment par parthénogénèse sur la plante accessoire : tel est le cas du Puceron lanigère, venu d'Amérique, qui ne trouve généralement pas chez nous l'Orme américain, son hôte originel régulier, et ne prospère que trop bien sur nos Pommiers.

Paul Marchal ne s'est pas borné à élucider l'histoire de ces Insectes en morphologiste et en théoricien de l'évolution ; il ne pouvait se désintéresser de leur importance économique en raison des pertes énormes qu'ils occasionnent aux récoltes. La connaissance approfondie qu'il avait acquise de leur biologie lui permettait de trouver les solutions adéquates à la lutte contre leurs dégâts : quelle ingéniosité et quelle élégance d'aller chercher aux États-Unis, patrie d'origine du Puceron lanigère, et d'acclimater chez nous un Hyménoptère infime, l'*Aphelinus mali*, qui, là-bas, réfrène naturellement l'extension du Puceron ; d'importer d'Australie la Coccinelle *Novius cardinalis* pour combattre les ravages causés par la Cochenille *Icerya* dans nos vergers du Midi !

Le Ministère de l'Agriculture avait, semble-t-il, pressenti tous les services qu'il pouvait attendre de P. Marchal en créant pour lui, dès sa jeunesse, la Station Entomologique de Paris. Lorsqu'en 1911 les vignobles

français eurent particulièrement à souffrir des ravages de la *Cochylis* et de l'*Eudemis*, Marchal fit créer cinq stations entomologiques régionales qui firent, sous sa haute direction, la plus utile besogne et furent ensuite encore multipliées.

En 1913, il fut le principal fondateur des *Annales des Épiphyties*, dont il resta le rédacteur en chef et l'inspirateur permanent. Il était au Ministère de l'Agriculture le conseiller le plus écouté. Ainsi à côté de l'œuvre scientifique si brillante de P. Marchal doit être exaltée son œuvre pratique, d'une répercussion économique immense. Ce fut un grand bienfaiteur public.

Rarement sans doute des mérites aussi éclatants parèrent un homme aussi modeste et aussi réservé; il se dérobait aux honneurs et déclina celui de présider à son tour notre Compagnie; une âme sensible et palpitante se cachait cependant sous ce masque de timidité : deux fois à ma connaissance, en 1926, dans la Séance publique des Cinq Académies et en 1932, comme Président du Congrès International d'Entomologie réuni à Paris, il voulut bien accepter la vedette et, libéré pour un moment de ses entraves ordinaires, il se livra tout entier dans des discours lyriques d'une magnifique envolée. Sans doute n'avons-nous pas connu tous les trésors qu'il portait en lui.

Nous aimions cette tête si fine qu'auréolait le génie et qui gardait jusque dans la vieillesse un charme juvénile; mais depuis quelques mois il avait déserté nos séances : un mal secret minait ses forces et tirait ses traits; son intelligence inquiète se tourmentait devant un dernier mystère, celui de sa propre souffrance, qu'il n'éluciderait plus. Gardienne de sa mémoire, l'Académie adresse à Mme Paul Marchal et à ses enfants ses vives condoléances; elle partage leur affliction et leur deuil.

## CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur l'emploi du théorème de Bernoulli pour faciliter le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un guichet.* Note de M. Émile Borel.

Sous sa forme la plus simple, le problème de l'attente à un guichet se ramène au calcul des nombres $p_n$ que nous allons définir.

Soit une infinité de points $A_n$ distribués au hasard sur une demi-droite $Ox$, l'unité de longueur étant choisie telle que la densité moyenne soit égale à l'unité. On sait que la probabilité pour qu'il y ait $k$ points sur un intervalle de longueur $a$ est alors $a^k/k!\, e^{-a}$.

Ayant choisi une longueur fixe $\sigma$, transformons la distribution des $A_n$ d'après les règles suivantes. Soit $A_1$ le premier point à la droite de O et $A_1B_1$ un intervalle égal à $\sigma$ à droite de $A_1$ ; si $A_1B_1$ ne renferme aucun point $A_i$, nous dirons qu'il forme une *série* d'un intervalle et le point $A_2$ le plus rapproché de $B_1$ sera pris comme origine d'une deuxième série.

Si $A_1B_1$ renferme $\alpha$ points $A_i$, nous porterons, à droite de $B_1$, $\alpha$ intervalles contigus égaux à $\sigma$; soit $B_1B_2 = \alpha\sigma$ l'ensemble de ces intervalles. Si $B_1B_2$ ne renferme aucun point $A_i$, notre première série sera formée des $\alpha+1$ intervalles $A_1B_2$; si $B_1B_2$ renferme $\beta$ points $A_i$, nous placerons, à droite de $B_2$, $\beta$ intervalles contigus égaux à $\sigma$, soit $B_2B_3 = \beta\sigma$ et nous continuerons de même jusqu'à ce que la série soit terminée, c'est-à-dire jusqu'à ce que les derniers intervalles $B_{n-1}B_n$ ne renferment aucun point $A_i$. Nous prendrons alors pour point de départ d'une nouvelle série le point $A_i$ le plus rapproché à droite de $B_n$.

Nous nous proposons de calculer les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ pour qu'une série se compose de 1, 2, ..., $n$ intervalles élémentaires de longueur $\sigma$, et la probabilité $p_\infty$ pour qu'une série se prolonge indéfiniment, c'est-à-dire comprenne une infinité d'intervalles.

Si nous posons $n = 1+\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des entiers positifs, on obtient immédiatement la probabilité pour qu'une série soit formée, après le premier intervalle $A_1B_1 = \sigma$, d'un second intervalle $B_1B_2 = \alpha\sigma$ (comprenant $\alpha$ intervalles élémentaires), d'un troisième $B_2B_3 = \beta\sigma$ et se termine par un quatrième $B_3B_4 = \gamma\sigma$. Il faut et il suffit, pour cela, que $A_1B_1$ renferme $\alpha$ points $A_i$, que $B_1B_2$ en renferme $\beta$, que $B_2B_3$ en renferme $\gamma$ et que $B_3B_4$ n'en renferme aucun. Les probabilités respectives de ces quatre éventualités sont

$$\frac{\sigma^\alpha}{\alpha!}e^{-\sigma}, \qquad \frac{(\alpha\sigma)^\beta}{\beta!}e^{-\alpha\sigma}, \qquad \frac{(\beta\sigma)^\gamma}{\gamma!}e^{-\beta\sigma}, \qquad e^{-\gamma\sigma}$$

et leur produit est égal à

$$(1) \qquad \frac{\alpha^\beta\beta^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\sigma^{\alpha+\beta+\gamma}e^{-(1+\alpha+\beta+\gamma)\sigma} = A\sigma^{n-1}e^{-n\sigma},$$

le coefficient numérique A ne dépendant pas de $\sigma$.

Pour obtenir $p_n$, il faudrait envisager toutes les décompositions possibles de $n$ en la somme d'un nombre quelconque d'entiers, telles que $1+\alpha+\beta+\gamma$ (les sommes $1+\alpha+\beta+\gamma$ et $1+\beta+\alpha+\gamma$ étant regardées comme distinctes lorsque $\alpha$ diffère de $\beta$) et faire la somme des probabilités analogues à (1) obtenues pour chacune de ces décompositions;

cette somme $p_n$ est égale à $A_n \sigma^{n-1} e^{-n\sigma}$, le coefficient $A_n$ étant indépendant de $\sigma$.

Nous allons utiliser le théorème de Bernoulli pour calculer les coefficients $A_n$. Si nous supposons $\sigma < 1$, il résulte du théorème de Bernoulli que $p_\infty = 0$ et que, par suite, la série $S = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ est convergente et égale à l'unité.

Si nous posons

$$\sigma e^{-\sigma} = z, \tag{2}$$

nous aurons

$$S = e^{-\sigma}[A_1 + A_2 z + \ldots + A_n z^{n-1} + \ldots] \tag{3}$$

et l'égalité $S = 1$ nous donnera

$$e^{\sigma} = A_1 + A_2 z + \ldots + A_n z^{n-1} + \ldots; \tag{4}$$

nous tirerons alors de (2) la relation

$$\sigma = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots. \tag{5}$$

Le calcul des coefficients $A_n$ se ramène alors à un problème simple d'analyse, la valeur $\sigma$ définie par (5) devant vérifier l'équation (2).

Le théorème de Cauchy donne

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma\, dz}{z^{n+1}}, \tag{6}$$

C étant un petit contour fermé entourant le point $z = 0$. En remplaçant $z$ et $dz$ par leurs valeurs tirées de (2), on obtient

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{(1-\sigma) e^{n\sigma}\, d\sigma}{\sigma^n}, \tag{7}$$

C′ étant un petit contour fermé entourant le point $\sigma = 0$. On en conclut

$$A_n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} \tag{8}$$

et, par suite,

$$p_n = \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} \sigma^{n-1} e^{-n\sigma}. \tag{9}$$

Ces valeurs des $p_n$ sont valables pour toutes les valeurs de $\sigma$, bien que la méthode qui nous les a données ait exigé l'hypothèse $\sigma < 1$.

Lorsque, dans la relation (2), $\sigma$ croît de o à $+\infty$, $z$ croît d'abord de o à $e^{-1}$ (pour $\sigma = 1$) et décroît ensuite de $e^{-1}$ à o.

Pour toute valeur de $z$ comprise entre o et $e^{-1}$, l'équation (2) a deux racines réelles positives $\sigma_1$ et $\sigma_2$, dont l'une $\sigma_1$ est inférieure à *un*; et l'autre $\sigma_2$ supérieure à *un*; c'est la racine $\sigma_1$ qui est donnée par la relation (5) où les $A_n$ ont les valeurs (8).

Lorsque $\sigma = 1$, $z = e^{-1}$, les relations (4) et (5) restent valables et l'on a donc encore $p_\infty = 0$.

Lorsque $\sigma$ est supérieur à 1, posons $\sigma = \sigma_2$ et désignons par $\sigma_1$ la racine inférieure à 1 de l'équation en $\sigma$

$$\sigma e^{-\sigma} = \sigma_1 e^{-\sigma_1} = z.$$

Nous aurons alors

$$S = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = e^{-\sigma_2}(A_1 + A_2 z + \ldots + A_n z^n + \ldots).$$

Mais la série entre parenthèses a pour somme $e^{\sigma_1}$; on a donc $S = e^{\sigma_1 - \sigma_2}$ et

(10) $$p_\infty = 1 - e^{(\sigma_1 - \sigma_2)} = 1 - e^{(\sigma_1 - \sigma)}.$$

Les relations (9) et (10) nous font connaître $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_\infty$ pour toutes les valeurs réelles positives de $\sigma$. La relation (10) pour $\sigma_1 = \sigma_2$ donne $p_\infty = 0$; on peut donc la regarder comme valable pour toute valeur de $\sigma_2 = \sigma$.

La méthode employée semble pouvoir être utilisée pour la solution d'autres problèmes de probabilités.

*Calculs complémentaires.* — Lorsque $\sigma$ est inférieur à 1, il est aisé de calculer la longueur moyenne des séries d'intervalles, c'est-à-dire le nombre moyen des intervalles formant les diverses séries. On sait que cette valeur moyenne peut être définie de deux manières différentes, soit comme la moyenne arithmétique des longueurs des séries comprises dans une portion étendue de $Ox$, soit comme la longueur probable de la série à laquelle appartient un point $A_i$ choisi au hasard sur la portion de $Ox$ considérée. Dans le premier cas, le nombre moyen des intervalles est $\Sigma n p_n$ et dans le second cas, il est égal au quotient de $\Sigma n^2 p_n$ par $\Sigma n p_n$. Les sommes $\Sigma n p_n$ et $\Sigma n^2 p_n$, lorsque $\sigma$ est inférieur à *un*, s'obtiennent aisément en calculant les dérivées de $\sigma$ par rapport à $z$, d'une part au moyen de (2) et, d'autre part, au moyen de (5). On obtient ainsi, pour le nombre moyen des intervalles d'une série, la valeur $1/1-\sigma$ avec la première définition de la moyenne et $1/(1-\sigma)^2$ avec la seconde définition. Le nombre des séries d'intervalles comprises dans une portion de $Ox$ de longueur A est égale, en moyenne, à $A(1-\sigma)$, car il faut alors adopter la première définition; tel est le nombre moyen des points $A_i$ qui sont des commencements de séries sur l'intervalle de longueur A.

Lorsque $\sigma = 1$, les valeurs obtenues pour le nombre moyen des intervalles d'une

série deviennent infinies; il y a là un paradoxe analogue au résultat bien connu : la longueur moyenne d'une partie de pile ou face est infinie, lorsque l'on convient d'arrêter la partie dès que les deux adversaires ont gagné le même nombre de fois, c'est-à-dire dès que l'équilibre s'est établi entre les gains et les pertes. Si $\sigma$ est supérieur à l'unité, on doit observer que, lorsqu'il se présente une série infinie, ce qui arrive forcément au bout d'un temps limité, toutes les autres séries possibles ne trouvent plus aucune occasion de se produire. La définition même de la probabilité de ces séries devrait donc être modifiée. On pourrait convenir que l'on prend successivement chacun des points $A_i$ comme commencement d'une série, en négligeant tous les points à gauche de $A_i$; il y a alors une infinité de séries possibles et les probabilités sont correctement définies.

## GÉOMÉTRIE. — *Sur les projecteurs de l'espace hilbertien ou unitaire.* Note de M. **Gaston Julia**.

Au cours d'études sur les opérateurs linéaires, j'ai fait sur les projecteurs de l'espace hilbertien ou unitaire quelques remarques qui me paraissent utiles pour la technique de ces projecteurs.

1. *Projecteurs permutables.* — $P_1$ et $P_2$ étant deux projecteurs, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que $P_1 P_2$ soit projecteur est que $P_1$ et $P_2$ soient *permutables*. Alors le domaine des valeurs de $P_1 P_2 = P_2 P_1$ est l'intersection des domaines de valeurs de $P_1$ et $P_2$. On a $\Delta_{P_1 P_2} = \Delta_{P_1} . \Delta_{P_2}$. Cette condition algébrique peut se remplacer par une condition géométrique relative aux variété fermées $\Delta_{P_1}$ et $\Delta_{P_2}$, d'où l'on conclut une expression générale très simple des couples permutables $P_1$, $P_2$.

2. $P_1$ et $P_2$ étant supposés permutables, considérons *dans* $\Delta_{P_1}$ le complément orthogonal de $\Delta_{P_1 P_2}$, ensemble des vecteurs de $\Delta_{P_1}$ orthogonaux à $\Delta_{P_1 P_2}$ : c'est une variété linéaire fermée $\Delta_{Q_1}$, domaine des valeurs d'un projecteur $Q_1 = P_1 - P_1 P_2$. On a $(P_1 P_2) Q_1 = Q_1 (P_1 P_2) = 0$. Considérons de même, *dans* $\Delta_{P_2}$, le complément orthogonal de $\Delta_{P_1 P_2}$, soit $\Delta_{Q_2}$ qui est le domaine des valeurs du projecteur

$$Q_2 = P_2 - P_1 P_2, \qquad \text{avec} \quad (P_1 P_2) Q_2 = Q_2 (P_1 P_2) = 0.$$

Il est visible que $P_1 P_2 = (P_1 P_2 + Q_1)(P_1 P_2 + Q_2)$ se réduit à

$$P_1 P_2 = P_1 P_2 + Q_1 Q_2$$

puisque le projecteur $P_1 P_2$ est orthogonal à $Q_1$ et à $Q_2$, et puisque aussi $(P_1 P_2)^2 = P_1 P_2$. Il en résulte $Q_1 Q_2 = 0$. *Les variétés* $\Delta_{Q_1}$ *et* $\Delta_{Q_2}$ *sont donc orthogonales.*

Réciproquement, si $\Delta_{Q_1}$ et $\Delta_{Q_2}$ sont orthogonales, la construction précédente prouve que $P_1 = A + Q_1$, $P_2 = A + Q_2$, A étant le projecteur tel que $\Delta_A = \Delta_{P_1} . \Delta_{P_2} =$ intersection de $\Delta_{P_1}$ et $\Delta_{P_2}$. De $AQ_1 = AQ_2 = 0$, et $Q_1 Q_2 = 0$, il résulte que $P_1 P_2 = A^2 = A$ est un projecteur et que $P_1 P_2 + P_2 P_1 = A$.

La condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $P_1$ et $P_2$ soient permutables est donc qu'en formant respectivement dans $\Delta_{P_1}$ et $\Delta_{P_2}$ les variétés complémentaires orthogonales $\Delta_{Q_1}$ et $\Delta_{Q_2}$ de l'intersection $\Delta_{P_1} . \Delta_{P_2}$, *ces deux variétés* $\Delta_{Q_1}$ *et* $\Delta_{Q_2}$ *soient orthogonales*. Cette condition peut encore s'exprimer par l'égalité $\Delta_{P_1} = \Delta_{P_1} . \Delta_{P_2} + \Delta_{P_1} . (H - \Delta_{P_2})$, où le signe + du deuxième membre unissant deux variétés orthogonales exprime que $\Delta_{P_1}$ se décompose suivant les deux variétés orthogonales complémentaires $\Delta_{P_1} . \Delta_{P_2}$ et $\Delta_{P_1} . (H - \Delta_{P_2})$, $H - \Delta_{P_2}$ étant la variété complémentaire de $\Delta_{P_2}$ dans l'espace total H. Elle traduit la relation $P_1 = P_1 P_2 + P_1 (1 - P_2)$. On a de même $\Delta_{P_2} = \Delta_{P_2} . \Delta_{P_1} + \Delta_{P_2} . (H - \Delta_{P_1})$ traduisant $P_2 = P_2 P_1 + P_2 (1 - P_1)$.

Tous les couples de projecteurs permutables s'obtiennent donc explicitement de la façon suivante : choisir trois variétés linéaires fermées quelconques deux à deux orthogonales $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, et les projecteurs correspondants $A_1 = P_{\mathfrak{M}_1}$, $A_2 = P_{\mathfrak{M}_2}$, $A_3 = P_{\mathfrak{M}_3}$, deux à deux orthogonaux ($A_i A_j = 0$ pour $i \neq j$); alors $A_1 + A_2 = P_{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}$ et $A_1 + A_3 = P_{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_3}$ constituent le couple le plus général de projecteurs permutables.

Notons les relations suivantes entre les $A_i$ précédents. $A_2 + A_1$, $A_2 + A_3$ sont permutables; $A_3 + A_1$, $A_3 + A_2$ le sont aussi. $A_1 + A_2 + A_3$ est un projecteur dont la variété de projection est

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3], (A_1 + A_2)(A_2 + A_3)(A_3 + A_1) = 0.$$

3. Il existe une autre forme très maniable de condition nécessaire et suffisante pour que $P_1$ et $P_2$ soient permutables : *la transformée par* $P_1$ *de la variété* $\Delta_{P_2}$ *doit être contenue dans* $\Delta_{P_2}$, $P_1(\Delta_{P_2}) \subset \Delta_{P_2}$ [ou l'équivalent $P_2(\Delta_{P_1}) \subset \Delta_{P_1}$]. En abrégé, $P_1$ conserve $\Delta_{P_2}$ et $P_2$ conserve $\Delta_{P_1}$. Cet énoncé se rattache au fait bien connu de la *réduction* d'un opérateur hermitien $P_1$ par une variété linéaire ($\Delta_{P_2}$). En voici une démonstration directe. Décomposons $\Delta_{P_2}$ en deux variétés orthogonales complémentaires, la première étant l'intersection V de $\Delta_{P_1}$ et $\Delta_{P_2}$, la deuxième étant l'ensemble $V_2$ des vecteurs de $\Delta_{P_2}$ orthogonaux à V. Tout vecteur $f_2 \in \Delta_{P_2}$ s'écrit $f_2 = \varphi + \varphi_2$, $\varphi \in V$, $\varphi_2 \in V_2$. $\varphi$ étant dans V et dans $\Delta_{P_1}$, on a $P_1 \varphi = \varphi \in V \in \Delta_{P_2}$. Il faut

donc et il suffit que $P_1 \varphi_2 \in \Delta_{P_2}$. Décomposons $\varphi_2$ en $\varphi_2 = g + h$, $g \in \Delta_{P_1}$ et $h$ orthogonal à $\Delta_{P_1}$ (donc à V). On a $P_1 \varphi_2 = P_1 g$ et la condition sera $P_1 g \in \Delta_{P_2}$. Or $P_1 g = g \in \Delta_{P_1}$. La condition est donc $P_1 g \in \Delta_{P_1} . \Delta_{P_2} = V$. Mais $\varphi_2$ et $h$ étant orthogonaux à V, $g$ l'est aussi et $P_1 g = g$. La condition est donc que $P_1 g$, orthogonal à V, soit dans V; c'est donc $P_1 g = g = 0$, ou encore que tout vecteur $\varphi_2$ de $V_2$ soit orthogonal à $\Delta_{P_1}$. Cela équivaut à dire que la variété $V_1$, complémentaire de V dans $\Delta_{P_1}$, doit être orthogonale à $V_2$, c'est-à-dire que $P_1$ et $P_2$ doivent être permutables. La condition est nécessaire et suffisante et l'on voit alors que $P_1(\Delta_{P_2}) = V = \Delta_{P_1} . \Delta_{P_2}$. De même $P_2(\Delta_{P_1}) = \Delta_{P_1} . \Delta_{P_2}$.

4. Comme application de ce qui précède on voit que, si P est permutable à $P_1 = P_{\mathfrak{M}_1}$ et à $P_2 = P_{\mathfrak{M}_2}$, P est permutable au projecteur $P_{[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]}$ qui projette sur la variété $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$, lieu des vecteurs $f_1 + f_2$, où $f_1$ décrit $\mathfrak{M}_1$ et $f_2$ décrit $\mathfrak{M}_2$ indépendamment l'un de l'autre. Cela est évident si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont orthogonales, car alors $P_{[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]} = P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2}$. Dans le cas général, si $f_1$ et $f_2$ sont des vecteurs arbitraires de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, $Pf_1$ et $Pf_2$ sont, d'après 3, respectivement dans $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, donc $P(f_1 + f_2) = Pf_1 + Pf_2$ sera dans $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ comme $f_1 + f_2$, vecteur arbitraire de $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$, et, d'après 3, P sera permutable à $P_{[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]}$.

5. *Projecteurs quelconques.* — Lorsque A et B sont deux projecteurs quelconques d'un espace hilbertien ou unitaire, AB — BA n'est pas nul, mais, *si l'espace est réel*, on peut affirmer que, pour un vecteur $f$ quelconque, $(AB - BA)f$ *est orthogonal à* $f$. En effet, pour tout $f$, $(f, ABf) = (Af, Bf)$ et $(f, BAf) = (Bf, Af) = (Af, Bf)$. On a donc, en général,

$$[f, (AB - BA)f] = (Af, Bf) - (Bf, Af) = 2i\mathfrak{J}(Af, Bf).$$

Mais, si l'espace est réel, $(Af, Bf)$ est réel $= (Bf, Af)$ et l'on a bien $[f, (AB - BA)f] = 0$.

## PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats au poste de Directeur de l'*Institut de Physique du Globe* de l'Université de Paris, pour la première ligne M. *Jean Coulomb* obtient 24 suffrages contre 12 à M. *Alexandre Dauvillier*; il y a 2 bulletins blancs.

Pour la seconde ligne M. *Alexandre Dauvillier* obtient 31 suffrages; il y a 3 bulletins blancs.

En conséquence la liste présentée à M. le Secrétaire d'État à l'Éducation Nationale et à la Jeunesse comprendra :

*En première ligne* . . . . . . . . . . . M. **Jean Coulomb**.
*En seconde ligne* . . . . . . . . . . . M. **Alexandre Dauvillier**.

## CORRESPONDANCE.

### THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur un problème d'Euler.* Note (¹) de M. Gaston Benneton, présentée par M. Paul Montel.

Il s'agit du problème étudié par Euler et mentionné par Legendre dans sa *Théorie des Nombres* (t. 2, nº 470) : Trouver les tableaux carrés d'ordre 4 pour lesquels la somme des carrés des termes soit égale dans chacune des lignes, des colonnes ou des diagonales, et la somme des produits des termes deux à deux soit nulle à l'égard de deux lignes, ou de deux colonnes quelconques. La solution résulte aisément de l'arithmétique des quaternions [2].

Nous utiliserons à cet effet le p. g. c. d. mixte que nous avons récemment défini pour les quaternions entiers [3].

1. Cherchons les substitutions linéaires orthogonales et normales à 4 variables à coefficients rationnels

$$y_\alpha = a_{0\alpha}x_0 + a_{1\alpha}x_1 + a_{2\alpha}x_2 + a_{3\alpha}x_3 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire telles que $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = m(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $m$ étant un nombre rationnel donné.

Le tableau des coefficients sera appelé tableau d'Euler, la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne étant relative à $y_\alpha$.

Soit $e$ le dénominateur commun des coefficients. Désignons par $\xi$, $\eta$ et $A_\alpha$ les quaternions dont les composantes sont $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $[y_0, y_1, y_2, y_3]$ et $[ea_{\alpha 0}, ea_{\alpha 1}, ea_{\alpha 2}, ea_{\alpha 3}]$. Les quaternions $A_\alpha$ sont entiers et orthogonaux; leur norme commune vaut $e^2m$. Leurs p. g. c. d. mixtes ont aussi pour norme $e^2m$ et les quaternions s'écrivent $A_\alpha = UJ_\alpha V$ : les $J_\alpha$ sont, à l'ordre et au signe près, les quatre quaternions unités de base.

La solution générale est donc, à l'ordre et au signe près des variables $x_\alpha$,

---

(¹) Séance du 23 février 1942.

(²) A. Hurwitz, *Nachrichten von d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1896, p. 336.

(³) *Comptes rendus*, 214, 1942, p. 406.

c'est-à-dire à l'ordre et au signe près des colonnes du tableau d'Euler : $e\eta = U\xi V$, où U et V désignent des quaternions entiers dont le produit des normes $uv$ vaut $e^2 m$.

2. La propriété normale et orthogonale du tableau d'Euler est vraie pour les lignes aussi bien que pour les colonnes; la somme des carrés des termes d'une même ligne ou d'une même colonne sera dite norme du tableau : elle vaut $m = uv/e^2$.

Si l'on ne tient pas compte du signe et de l'ordre des lignes et des colonnes, ni de l'échange global des lignes avec les colonnes, on peut prendre pour U un quaternion primitif de norme impaire dont les composantes $x$, $y$, $z$, $t$ vérifient $x \geq y \geq z \geq t \geq 0$, et prendre pour V un quaternion dont les composantes $b$, $c$, $d$ sont positives ou nulles et inférieures à la valeur absolue de la composante $a$.

Le produit de deux tableaux d'Euler est un tableau d'Euler; sa norme est égale au produit des normes des facteurs. Inversement tout tableau $\mathfrak{T}$ est décomposable en produit de deux tableaux canoniques. En effet désignons par [U] et {V} les tableaux associés aux substitutions $U\xi$ et $\xi V$. Le tableau d'Euler qui dérive de $U\xi V$ s'écrit

$$\mathfrak{T} = [U] \times \{V\}.$$

Il s'ensuit que le déterminant du tableau est égal au carré de sa norme.

3. Les tableaux canoniques ont leurs termes égaux ou symétriques deux à deux. A l'opposé de ce cas formons des tableaux où les seize valeurs absolues soient toutes différentes.

Une condition nécessaire pour cela est qu'il n'existe dans U et dans V aucun couple de composantes de même rang ou de rangs associés formant une proportion en valeur absolue. Ainsi il ne peut y avoir qu'un seul zéro au plus sur les huit composantes de U et V.

Parmi les solutions nous trouvons notamment

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 17 & 7 & 4 & 0 \\ 6 & -14 & -1 & -11 \\ 5 & -3 & -16 & 8 \\ 2 & -10 & 9 & 13 \end{vmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 20 & 9 & 4 & 1 \\ 8 & -11 & -12 & -13 \\ 5 & -10 & -7 & 18 \\ 3 & -14 & 17 & -2 \end{vmatrix}.$$

Le tableau (1) à valeurs absolues toutes différentes est celui qui possède la norme minimum. Le tableau (2) à valeurs absolues toutes différentes et positives est l'un des plus simples du genre.

4. L'exemple donné par Euler possède une propriété supplémentaire :

la somme des carrés des termes de chaque diagonale est la même que pour les lignes, donc égale à la norme du tableau.

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 79 & 41 & 8 & 23 \\ 32 & -37 & 49 & 61 \\ 17 & -68 & 12 & 59 \\ 31 & -29 & -77 & -28 \end{vmatrix}, \qquad (4)\quad \begin{vmatrix} 70 & 47 & 4 & 5 \\ 20 & -19 & -58 & -55 \\ 35 & -56 & -17 & 50 \\ 25 & -38 & 59 & -40 \end{vmatrix}.$$

(3) est l'exemple d'Euler, de norme 8515; (4) est un tableau analogue de norme 7150. Toutes les valeurs absolues sont différentes.

5. Un cas particulier du problème concerne les substitutions orthogonales à trois variables de déterminant 1 à coefficients rationnels, c'est-à-dire les tableaux de cosinus directeurs rationnels.

La solution s'écrit alors $u\eta = \mathrm{U}\xi\overline{\mathrm{U}}$, où U et $\overline{\mathrm{U}}$ sont des quaternions conjugués primitifs de norme $u$ impaire. Voici deux exemples :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} 52 & 23 & 4 \\ 17 & -44 & 32 \\ 16 & -28 & -47 \end{vmatrix}, \qquad (6)\quad \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}576 & 0{,}168 \\ 0{,}6 & -0{,}768 & -0{,}224 \\ 0{,}0 & -0{,}280 & 0{,}960 \end{vmatrix}.$$

Dans le tableau (5) les cosinus sont des fractions toutes différentes de dénominateur commun 57 (les numérateurs sont seuls indiqués) : c'est le tableau à cosinus rationnels distincts de dénominateur commun minimum. Le tableau (6) est le plus simple qui contienne neuf cosinus différents exprimés exactement en décimales.

Il n'existe pas de tableau de cosinus directeurs rationnels possédant la propriété des diagonales.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'équation de la chaleur dans le cas d'une sphère stratifiée avec des sources distribuées sur les surfaces de discontinuité.* Note [1] de M. **Vladimir A. Kostitzin**, présentée par M. Paul Montel.

1. L'étude de l'état thermique des corps célestes nous impose la considération de surfaces de discontinuité et de couches thermogènes; en effet

---

[1] Séance du 2 mars 1942.

la Terre est nettement stratifiée, et d'autre part certains auteurs se servent de l'hypothèse de la stratification pour expliquer soit la structure de la surface de la Lune, soit les inégalités de son mouvement. Sans l'existence de sources thermiques intérieures, l'état actuel de la Terre resterait inexplicable. Dans cette Note, je complète mes recherches précédentes (²) par l'étude du cas relativement simple d'une sphère composée d'un noyau sphérique homogène entouré d'une enveloppe homogène concentrique. Soient resp. $c_1$, $l_1$, $\rho_1$, $c_2$, $l_2$, $\rho_2$ la chaleur spécifique, la conductibilité thermique et la densité du noyau et de l'enveloppe; $r_1$ le rayon du noyau, et R le rayon de la surface extérieure. Dans ces conditions, les équations du problème prennent la forme

$$(1)\quad \begin{cases} c_1\rho_1 \dfrac{\partial u}{\partial t} = l_1\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\varphi}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] & (0 \leq r < r_1), \\ c_2\rho_2 \dfrac{\partial u}{\partial t} = l_2\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\varphi}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] & (r_1 < r \leq R), \end{cases}$$

$$(2)\quad \mathrm{E}u(\mathrm{R}, \varphi, \psi, t) = \mathrm{R}\left|^{r=\mathrm{R}} \frac{\partial u(r, \varphi, \psi, t)}{\partial r} + \Psi(\varphi, \psi, t),\right.$$

$$(3)\quad u(r, \varphi, \psi, 0) = \omega(r, \varphi, \psi),$$

$$(4)\quad l_1 r_1 \left|^{r=r_1-0} \frac{\partial u}{\partial r} = l_2 r_1 \right|^{r=r_1+0} \frac{\partial u}{\partial r} = h \left|^{r=r_1+0}_{r=r_1-0} u + \Phi(\varphi, \psi, t).\right.$$

Les équations (4) expriment la discontinuité thermique à la surface de séparation et la continuité du flux de la chaleur.

Remarquons en passant que la chaleur spécifique dépend de la température et que, par conséquent, l'équation de la chaleur n'est pas linéaire. Toutefois, en admettant que la chaleur spécifique suive, soit la loi bien connue d'Einstein, soit une une loi analogue, on obtient pour $c$ une expression pratiquement indépendante de la température pour toute la masse terrestre. En ce qui concerne le coefficient de transmission $h$, il faut admettre qu'il devient infini pour $l_1 \to l_2$. Cette hypothèse est nécessaire pour rétablir la continuité de la température dès que la différence entre les deux couches disparaît.

2. En supposant, comme dans mes Notes précédentes, les fonctions $u$, $\omega$, $\Psi$, $\Phi$ développables en séries de fonctions sphériques $\mathrm{S}_{nk}(\varphi, \psi)$, avec les coefficients respectifs $u_{nk}(r, t)$, $\omega_{nk}(r)$, $\Psi_{nk}(t)$, $\Phi_{nk}(t)$, on trouve, pour

(²) *Comptes rendus*, 213, 1941, pp. 972-974; 214, 1942, pp. 47-49.

la fonction $u_{nk}$, les équations

$$(6)\quad \begin{cases} c_1\rho_1 \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t} = l_1\left[\dfrac{\partial^2 u_{nk}}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r} - \dfrac{n(n+1)}{r^2}u_{nk}\right] & (r_1 < r \leqq \mathrm{R}), \\ c_2\rho_2 \dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t} = l_2\left[\dfrac{\partial^2 u_{nk}}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial r} - \dfrac{n(n+1)}{r^2}u_{nk}\right] & (0 \leqq r < r_1); \end{cases}$$

$$(6)\qquad u_{nk}(r, 0) = \omega_{nk}(r);$$

$$(7)\qquad \mathrm{E}\,u_{nk}(\mathrm{R}, t) = \mathrm{R}\left|^{r=\mathrm{R}} \frac{\partial u_{nk}}{\partial r} + \Psi_{nk}(t);\right.$$

$$(8)\qquad l_1 r_1\left|^{r=r_1-0}\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} = l_2 r_2\right|^{r=r_1+0}\frac{\partial u_{nk}}{\partial r} = h[u_{nk}(r_1+0, t) - u_{nk}(r_1-0, t)] + \Phi_{nk}.$$

Soit $q_n(\lambda, r)$ une solution des équations différentielles

$$(9)\quad \begin{cases} q''_n - \dfrac{2q'_n}{r} + q_n\left[\dfrac{\lambda c_1\rho_1}{l_1} - \dfrac{(n-1)(n+2)}{r^2}\right] = 0 & (0 \leqq r < r_1), \\ q''_n - \dfrac{2q'_n}{r} + q_n\left[\dfrac{\lambda c_2\rho_2}{l_2} - \dfrac{(n-1)(n+2)}{r^2}\right] = 0 & (r_1 < r \leqq \mathrm{R}), \end{cases}$$

vérifiant les conditions

$$(10)\quad \begin{cases} 2q_n(\lambda, r_1+0) - r_1 q'_n(\lambda, r_1+0) + \dfrac{h}{l_2}q_n(\lambda, r_1+0) - \dfrac{h}{l_1}q_n(\lambda, r_1-0) = 0, \\ 2q_n(\lambda, r_1-0) - r_1 q'_n(\lambda, r_1-0) + \dfrac{h}{l_2}q_n(\lambda, r_1+0) - \dfrac{h}{l_1}q_n(\lambda, r_1-0) = 0, \\ q_n(\lambda, 0) = 0, \qquad q'_n(\lambda, 0) = 0; \end{cases}$$

en choisissant pour $\lambda$ une des racines de l'équation caractéristique

$$(11)\qquad (\mathrm{E}+2)\,q_n(\lambda, \mathrm{R}) - \mathrm{R}\,q'_n(\lambda, \mathrm{R}) = 0,$$

on obtient une des fonctions appartenant au système orthogonal complet

$$(12)\quad \begin{cases} q_n(\lambda, r) = r^{\frac{3}{2}}\mathfrak{J}_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\dfrac{\lambda c_1\rho_1}{l_1}}\right) & (0 \leqq r < r_1), \\ q_n(\lambda, r) = \mathfrak{D}_{n1}r^{\frac{3}{2}}\mathrm{I}_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\dfrac{\lambda c_2\rho_2}{l_2}}\right) + \mathfrak{D}_{n2}r^{\frac{3}{2}}\mathrm{N}_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\dfrac{\lambda c_2\rho_2}{l_2}}\right) & (r_1 < r \leqq \mathrm{R}); \end{cases}$$

en posant

$$(13)\quad \mathrm{A}_n(\lambda, r) = \int_0^r q_n^2(\lambda, s)\frac{ds}{s^2}, \qquad \mathrm{V}_{nk}(\lambda, t) = \frac{c_1\rho_1}{l_1}\int_0^{r_1} q_n u_{nk}\,dr + \frac{c_2\rho_2}{l_2}\int_{r_1}^{\mathrm{R}} q_n u_{nk}\,dr,$$

$$(14)\qquad r^2 u_{nk}(r, t) = \sum \frac{q_n(\lambda, r)\,\mathrm{V}_{nk}(\lambda, t)}{\mathrm{A}_n(\lambda, \mathrm{R})},$$

on obtient sans peine pour l'expression du coefficient $V_{nk}(\lambda, t)$

$$(15)\quad V_{nk}(\lambda, t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{c_1\rho_1}{l_1}\int_0^{r_1}\omega_{nk}(z)q_n(\lambda, z)\,dz + \frac{c_2\rho_2}{l_2}\int_{r_1}^{R}\omega_{nk}(z)q_n(\lambda, z)\,dz\right]$$
$$-\frac{q_n(\lambda, R)}{R}\int_0^t \Psi_{nk}(s)\,e^{-\lambda(t-s)}\,ds$$
$$+\frac{1}{r_1 h}\left[l_1 q_n(\lambda, r_1+0) - l_2 q_n(\lambda, r_1-0)\right]\int_0^t \Phi_{nk}(s)\,e^{-\lambda(t-s)}\,ds,$$

ce qui résout complètement le problème posé. Il serait très facile de construire la solution générale sous une forme compacte, en introduisant les fonctions $G_n$ et H analogues à celles définies dans mes Notes précédentes.

En ce qui concerne l'équation caractéristique (11), elle est beaucoup plus compliquée que dans le cas d'une sphère homogène, mais elle se simplifie si l'on suppose R suffisamment grand par rapport à $r_1$. On peut traiter de la même façon le cas de plusieurs couches, homogènes ou hétérogènes.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz.* Note de M. **Julien Kravtchenko**, présentée par M. Henri Villat.

Ayant obtenu des théorèmes d'existence [1] pour les problèmes du sillage ou problème de Helmholtz dans le cas d'un contour à tangente continue, je me propose d'étendre ce résultat au cas des contours possédant des points anguleux. Pour les notations utilisées ci-dessous et l'énoncé précis du problème du sillage, on se reportera au travail précité [2]; la configuration des éléments donnés *a priori* $\mathcal{C}$ est défini comme aux pages 169-170 de ce Mémoire; seules, sont à modifier les hypothèses intéressant la fonction donnée $\Psi(l)$ qui caractérise l'obstacle $\widehat{BC}$. Dans ce qui suit nous supposerons : 1° $\Psi(l)$ est assujettie à vérifier les conditions

$$(1)\qquad \varepsilon \leqq \Psi(l) \leqq \pi - \varepsilon, \qquad \alpha \leqq l \leqq \beta,$$

(1) *Thèse* (*Journ. de Math.*, 9e série, 20, 1941, pp. 35-103). On consultera aussi le travail de M. J. Leray, publié dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, 8, 1936, pp. 145-160 et dont ma Thèse constitue le prolongement. Signalons également aussi les Notes de M. A. Weinstein dans les *Rendiconti d. R. Accademia dei Lincei*, 4, 1936, p. 119 et 5, 1927, p. 157.

(2) Cf. spécialement § 23, pp. 169-176.

avec $0 < \varepsilon < \pi$, $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \neq \pi$. Ces conditions sont plus strictes que les inégalités $0 \leqq \Psi(l) \leqq h$ utilisées dans ma Thèse (cf. p. 169); en revanche, elles nous permettent de nous affranchir de l'hypothèse de l'existence et de la continuité de la dérivée $d\Psi/dl$; 2° $\Psi(l)$ est supposée continue dans l'intervalle $0 \leqq l \leqq \beta$, sauf un nombre fini $n$ de points d'abscisses curvilignes $l_1, l_2, \ldots, l_n$ en lesquels $\Psi(l)$ subit des discontinuités de première espèce. Dans chacun des intervalles $\alpha \leqq l \leqq l_1; \ldots; l_i \leqq l \leqq l_{i+1}; \ldots; l_n \leqq l \leqq \beta$, $\Psi(l)$ vérifie une condition de Hölder (³)

$$(2) \qquad |\Psi(l) - \Psi(l')| \leqq \text{const.}\, |l - l'|^{\nu}, \qquad 0 < \nu \leqq 1.$$

Nous nous proposons de montrer que l'on peut attacher à la configuration $\mathcal{C}$ ainsi définie une solution au moins du problème du sillage de Helmholtz.

Aux inconnues $l(s)$, $a$ et $b$, introduites au paragraphe 23 de ma Thèse, s'ajoutent ici les $n$ paramètres $s_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \pi$, arguments des images des $n$ points anguleux de $\widehat{BC}$. Il sera commode de choisir pour inconnues nouvelles, outre les $n+2$ paramètres $a$, $b$ et les $s_i$, les $\bar{n}+1$ fonctions définies par

$$(3) \qquad \begin{cases} l_1(s) = l(s) & \text{pour} \quad 0 \leqq s \leqq s_1, \\ l_2(s) = l(s) & \text{pour} \quad s_1 \leqq s \leqq s_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{n+1}(s) = l(s) & \text{pour} \quad s_{n+1} \leqq s \leqq \pi. \end{cases}$$

Ceci posé, on a les résultats suivants :

1° D'après les inégalités (1) le domaine $\mathcal{A}$ (⁴), correspondant à $\mathcal{C}$, est nécessairement d'un seul tenant.

2° Les raisonnements du paragraphe 22 (cf. spécialement la page 152),

---

(³) Dans son Mémoire précité M. Leray a annoncé des théorèmes d'existence relatifs au problème de Helmholtz posé relativement à des contours plus particuliers que ceux que nous venons de définir (cf. p. 153, *loc. cit.*); les hypothèses plus restrictives, qu'il a adoptées, lui permettent, en revanche, d'énoncer des résultats d'unicité. Remarquons enfin que la solution du problème de Helmholtz, posé pour des obstacles anguleux et convexes vers le fluide vif, est dépourvue d'interprétation physique valable; la vitesse du fluide devient, en effet, infinie en chacun des points anguleux saillants vers le courant (voir à ce sujet les *Leçons sur l'hydrodynamique* de M. H. Villat, Paris, 1929, p. 75).

(⁴) Cf. le paragraphe 23 de ma Thèse.

24, 25 et 26 s'appliquent à $\mathcal{C}$. On déduit de là que les $(n+1)$ inconnues $l_i(s)$ vérifient une condition $\mathcal{L}_p(s)$ ([5]) sur chacun des intervalles où elles sont définies [cf. (3)], le nombre $p$ pouvant être choisi arbitrairement grand; l'inégalité (2) montre alors qu'il en sera de même de $\Psi[l_i(s)]$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$.

3° Les résultats qui précèdent permettent d'effectuer la mise en équations du problème posé ci-dessus. L'inconnue $l(s)$ du paragraphe 23 de ma Thèse est définie ici au moyen de $(2n+1)$ nouvelles inconnues : les $l_i(s)$ $[i=1, 2, \ldots (n+1)]$ et les $s_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ [cf. (3)]. L'équation (3.20) de la page 176 se scinde ainsi en $(n+1)$ équations définissant les $l_i(s)$; on obtiendra $n$ conditions complémentaires en écrivant

$$l_i(s_i)=l_i.$$

Enfin les équations (3.21) subsistent sans modification.

Des artifices d'écriture convenables permettent alors de réduire l'ensemble des équations fonctionnelles du problème à une équation du type

$$x=F(x), \tag{4}$$

étudié par MM. J. Leray et J. Schauder ([6]), où $x$ désigne l'élément d'un espace fonctionnel convenablement choisi qui est linéaire, normé et complet, et $F(x)$ une transformation fonctionnelle complètement continue. Moyennant les limitations *a priori* des normes des solutions éventuelles de (4), limitations qui résultent de l'alinéa 2°, la théorie de l'indice total s'applique [cf. à ce sujet le paragraphe 28 de ma Thèse], on en déduit que le problème posé possède au moins une solution.

---

([5]) Cf. le paragraphe 11, page 65 de ma Thèse. On rappelle que $l_i(s)$ vérifiera une condition $\mathcal{L}_p(s)$ lorsqu'on a

$$|l_i(s)-l_i(s')|\leq\frac{\text{const.}}{|\operatorname{Log}|s-s'||^p},$$

$s$ et $s'$ étant deux points quelconques de l'intervalle de définition de $l_i(s)$.

([6]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 51, 1934, pp. 45-90.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes.* Note (¹) de M. **Jacques Dufresnoy**, présentée par M. Gaston Julia.

1. Nous utiliserons la proposition suivante (²) :

Théorème A. — *Soit $w = F(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < R$. Supposons qu'il existe $q \geqq 3$ domaines $D_i$ simplement connexes et disjoints (dont certains peuvent se réduire à des points) à chacun desquels est associé un entier positif $\mu_i$ avec $\Sigma[1 - (1/\mu_i)] > 2$ tels que, à l'exception de n d'entre eux au plus, tous les disques de la surface de Riemann décrite par $w = F(z)$ et situés sur $D_i$ aient $\mu_i$ feuillets au moins. On a, lorsque $r < R$,*

$$\left[S(r) - \frac{n}{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}\right] \log\frac{R}{r} < \frac{K}{\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]^2},$$

*en désignant par $4\pi S(r)$ l'aire sphérique de la surface de Riemann correspondant à $|z| < r$ et par K une constante dépendant des domaines $D_i$.*

Si l'on remplace la condition imposée aux disques situés sur $D_i$ d'avoir $\mu_i$ feuillets au moins par la condition de non-existence de ces disques, le théorème précédent s'applique avec $\mu_i = \infty$. En particulier, *si la fonction $w = F(z)$ ne prend pas plus de n fois en tout trois valeurs $a_i$, on a*

$$[S(r) - n] \log\frac{R}{r} < K_1.$$

Nous avons donné (²) une estimation de $K_1$ en fonction de la distance sphérique minima $\delta_0$ de ces trois points $a_i$ pris deux à deux. En utilisant une transformation homographique qui fait correspondre aux points $a_i$ trois points fixes ($1, j, j^2$ par exemple); on arrive à $K_1 = C + \log 1/\delta_0$ où C est une constante numérique.

Du théorème A, on déduit le suivant :

Théorème B. — *Dans les conditions du théorème A et si de plus $n = 0$, on a*

$$R \frac{|F'(0)|}{1 + |F(0)|^2} < \exp \frac{2K}{\left[\Sigma\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]^2}.$$

Ces théorèmes permettent de retrouver très simplement certaines propriétés des cercles de remplissage. Pour les études quantitatives, nous utiliserons

(¹) Séance du 2 mars 1942.

(²) *Annales de l'École Normale supérieure*, 58, 1941, pp. 179-259.

$S(r)$ au lieu de $T(r)$ habituellement employé; nos résultats contiennent les résultats classiques correspondants et quelques propriétés nouvelles.

2. Le théorème B montre que, *si* $w = f(z)$ *est une fonction méromorphe dans tout le plan fini et telle que* $|z||f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$ *ne soit pas borné, il existe une famille de cercles de remplissage* $\Gamma_k$ *au sens de Valiron-Milloux* [le cercle $\Gamma_k$ a pour centre $z_k$ avec $|z_k| = r_k$ et pour rayon $\rho_k$ tels que $r_k \to \infty$ et $\rho_k/r_k \to 0$ quand $k$ augmente indéfiniment; dans $\Gamma_k$ la fonction $w = f(z)$ prend toutes les valeurs de la sphère complexe sauf au plus celles situées dans deux cercles dont des rayons tendent vers zéro avec $1/k$].

Mais le théorème B nous apprend d'autres propriétés des cercles $\Gamma_k$ :

1° *Dans* $\Gamma_k$, *l'équation* $f(z) - a = 0$ *a une racine simple au moins quelle que soit la valeur* $a$ *sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles que l'on peut enfermer dans quatre cercles dont les rayons tendent vers* $0$ *avec* $1/k$.

2° *Étant donnés trois domaines* $D_i$, *la surface de Riemann décrite par les valeurs* $w$ *de la fonction lorsque* $z$ *décrit* $\Gamma_k$ *présente au moins un disque sur l'un des domaines* $D_i$ *pourvu que* $k$ *soit suffisamment grand.*

3° Proposition analogue pour les *disques simples* avec cinq domaines $D_i$.

4° Plus généralement, *étant donnés* $q \geq 3$ *domaines* $D_i$ *simplement connexes et disjoints à chacun desquels est associé un entier positif* $\mu_i$ *avec* $\Sigma[1-(1/\mu_i)] > 2$, *la surface de Riemann correspondant à* $\Gamma_k$ *présente, dès que* $k$ *est assez grand, au moins un disque ayant moins de* $\mu_i$ *feuillets sur l'un des domaines* $D_i$.

Les seules fonctions ne jouissant pas des propriétés précédentes sont les fonctions exceptionnelles d'Ostrowsky qui ne possèdent pas de cercles de remplissage au sens ordinaire. La limitation de la dérivée sphérique de ces fonctions montre aussitôt qu'elles satisfont à $S(r) = O[\log r]$.

3. Nous plaçant dans le cas $\overline{\lim}\, S(r)/\log r = \infty$, nous allons obtenir des propriétés quantitatives des cercles de remplissage. A partir du théorème A et en effectuant un pavage convenable du plan des $z$, on parvient à la proposition suivante :

*Si* $w = f(z)$ *est méromorphe, la couronne* $r < |z| < R$ *contient un point* $z_k$ *centre d'un cercle* $C_k$ *de rayon* $|z_k|/q$. *Dans* $C_k$, $f(z)$ *prend au moins* $n_k \geq 0$ *fois toutes valeurs, sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon* $e^{-n_k}$ *de la sphère. On a*

$$n_k > \frac{K}{q^2} \frac{S(R) - S(r)}{1 + \log \frac{R}{r}} - K_1,$$

*où* $K$ *et* $K_1$ *sont des constantes numériques. On suppose* $q$ *donné supérieur à* un.

On en déduit, en particulier, les conséquences suivantes :

1° Si $\overline{\lim} S(r)/\log r = \infty$, il existe une famille de cercles de remplissage jouissant des propriétés énoncées dans le paragraphe 2 avec cette précision supplémentaire : le nombre de fois que les valeurs sont prises (ou le nombre de disques situés sur les domaines) augmente indéfiniment avec $k$.

2° Supposons que $f(z)$ soit d'ordre $\rho$ fini, non nul. Désignons par $U(r)$ une fonction *régularisante* de $S(r)$ satisfaisant à $\overline{\lim} S(r)/U(r) = 1$ et $\underline{\lim} U(kr)/U(r) = k^{\rho}$ pour $1 < k < \infty$ (³). Si $q(r)$ est une fonction croissante (au sens large) satisfaisant à $1 < q^2(r) < K_2 U(r)$, où $K_2$ est une constante ne dépendant que de $\rho$, *il existe une famille de cercles* $C_k$ *d'équation* $|z - z_k| < r_k/q(r_k)$ *avec* $\lim r_k = \infty$ *dans chacun desquels* $f(z)$ *prend* $n_k \geq 0$ *fois au moins toutes valeurs sauf au plus celles situées dans deux cercles de rayon* $e^{-n_k}$. *On a* $n_k = K_2 U(r_k)/q^2(r_k)$. Cette proposition permet de mettre en évidence des familles de cercles de remplissage pour lesquels $q(r)$ croît rapidement $\left[\text{comme } \sqrt{U(r)}\right]$ ou pour lesquels $n_k$ croît rapidement [comme $\varepsilon(r_k) U(r_k)$ où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro aussi lentement qu'on le veut].

3° Supposons que $f(z)$ soit d'ordre infini. La fonction régularisante $U(r) = r^{\rho(r)}$ sera assujettie aux conditions : $\overline{\lim}\, S(r)/U(r) = 1$, $\rho(r)$ croissante. Après avoir précisé la proposition énoncée au début de ce paragraphe, on montre que le théorème de 2° s'applique lorsque $1 < q^2(r) < K_3 U(r) \rho(r)$; on peut prendre

$$n_k = \frac{K_3 U(r_k) \rho(r_k)}{q(r_k)[q(r_k) + \rho(r_k)]}.$$

En particulier il existe des cercles de remplissage pour lesquels $q(r)$ croît comme $\sqrt{U(r)\rho(r)}$.

Cela entraîne la proposition suivante : Si $V(r) = r^{\sigma(r)}$ est une fonction telle que $\overline{\lim}\, T(r)/V(r) = 1$ et que $\sigma(r) + [\log \sigma(r)/\log r]$ soit croissante, alors $q(r)$ peut croître comme $\sigma(r)\sqrt{V(r)}$.

Les cercles de remplissage mis en évidence dans ce paragraphe jouissent des propriétés énoncées dans le paragraphe 2, ces propriétés étant ici précisées. Par exemple, dans le cas général 4°, *le nombre de disques à moins de* $\mu_i$ *feuillets est au moins égal à* $n_k$ *dès que* $k$ *est suffisamment grand.*

La méthode employée s'applique également à l'étude des fonctions méromorphes dans un cercle ou dans un angle.

---

(³) On peut prendre la fonction régularisante définie par M. Valiron à l'aide de *l'ordre précisé* $\rho(r)$. Le théorème que nous allons énoncer contient le théorème analogue connu où $S(r)$ est remplacé par $T(r)$.

MÉCANIQUE. — *Calcul des contraintes, dans l'hypothèse de la relaxation complète.* Note de M. **Jean Goguel**, présentée par M. Albert Caquot.

Nous avons montré [1] que, au cours de la relaxation des contraintes, une certaine intégrale $\iiint \Phi\, dV$ ne peut que décroître. Si la relaxation est complète, cette intégrale sera minimum.

Un cas particulier intéressant est celui où la très petite déformation permanente se fait suivant les lois du solide visqueux.

La fonction $\varphi(c)$ est une constante, et $\Phi$ est proportionnel à $c^2$ (avec $3c^2 = N_1^2 + N_2^2 + \ldots - N_1 N_2 - \ldots + 3T_1^2 + \ldots$).

Pour exprimer que $\Phi$ est minimum, on remarquera que les équations d'équilibre, que vérifient les composantes de la contrainte, expriment que ces six quantités dépendent de trois fonctions indépendantes $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$ par

$$N_1 = \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2}, \qquad T_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y\, \partial z}.$$

Après avoir substitué ces valeurs dans l'intégrale, on écrit les trois équations d'Euler qui deviennent par la substitution inverse

$$2\frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 N_2}{\partial z^2} - \Delta N_1 - 4\frac{\partial^2 T_1}{\partial y\, \partial z} = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

et deux équations analogues, d'où l'on tire, par combinaison avec les équations d'équilibre,

$$3\,\Delta N_1 + 2\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \qquad (\Theta = N_1 + N_2 + N_3).$$

Ces trois équations, qui expriment que la relaxation est complète, sont les mêmes que celles qui expriment qu'il existe un état naturel, et que le corps est incompressible. Mais, comme nous l'avons indiqué, les conditions aux limites devront souvent être exprimées sous une forme spéciale, qui conduira à des solutions différentes.

Les calculs ci-dessus s'appliquent encore lorsqu'il existe une force de masse dérivant d'un potentiel U, à condition de remplacer les composantes normales de contrainte, $N_1$, $N_2$, $N_3$ par $N'_1 = N_1 - \rho U$, $N'_2 = N_2 - \rho U$, ....

---

[1] *Comptes rendus*, **214**, 1942, p. 410.

Les mathématiciens (²) qui se sont occupés de la répartition des contraintes dans le Globe terrestre ont toujours employé les équations relatives au corps incompressible, toute autre hypothèse conduisant à des résultats absurdes.

Les considérations ci-dessus justifient cette méthode et montrent à quelles hypothèses elle correspond. Elle ne suppose nullement que la matière est réellement incompressible (ce qui serait contraire à la réalité), mais que les déformations permanentes infiniment petites se font suivant les lois de la déformation visqueuse, et que la relaxation des contraintes est complète.

Le résultat établi par la Note précédente est plus général et s'applique encore avec d'autres lois de déformation permanente, par exemple celles de la déformation plastique, mais sans qu'il soit possible d'en développer mathématiquement les conclusions.

HYDRAULIQUE. — *Recherches expérimentales sur les oscillations à l'intérieur des cheminées d'équilibre à étranglement.* Note (¹) de M. **Léopold Escande**, transmise par M. Charles Camichel.

Nous avons complété nos recherches sur les chambres d'équilibre, en étudiant le cas où il existe un étranglement, de courte longueur, créant une perte de charge singulière, à la base de la chambre d'équilibre.

Les expériences ont été effectuées sur les deux modèles de notre Laboratoire, dont les dimensions ont été données dans une Note précédente (²), en plaçant à leur base une plaque obturatrice percée d'un orifice circulaire en mince paroi, de diamètre égal à $27^{cm}$, dans le cas du grand modèle.

La détermination de la perte de charge, à la traversée de l'étranglement, a été faite, sur le petit modèle, au moyen de prises de pression encadrant la plaque d'étranglement, en produisant une série d'écoulements permanents, de débits connus, à travers l'orifice. La perte de charge varie

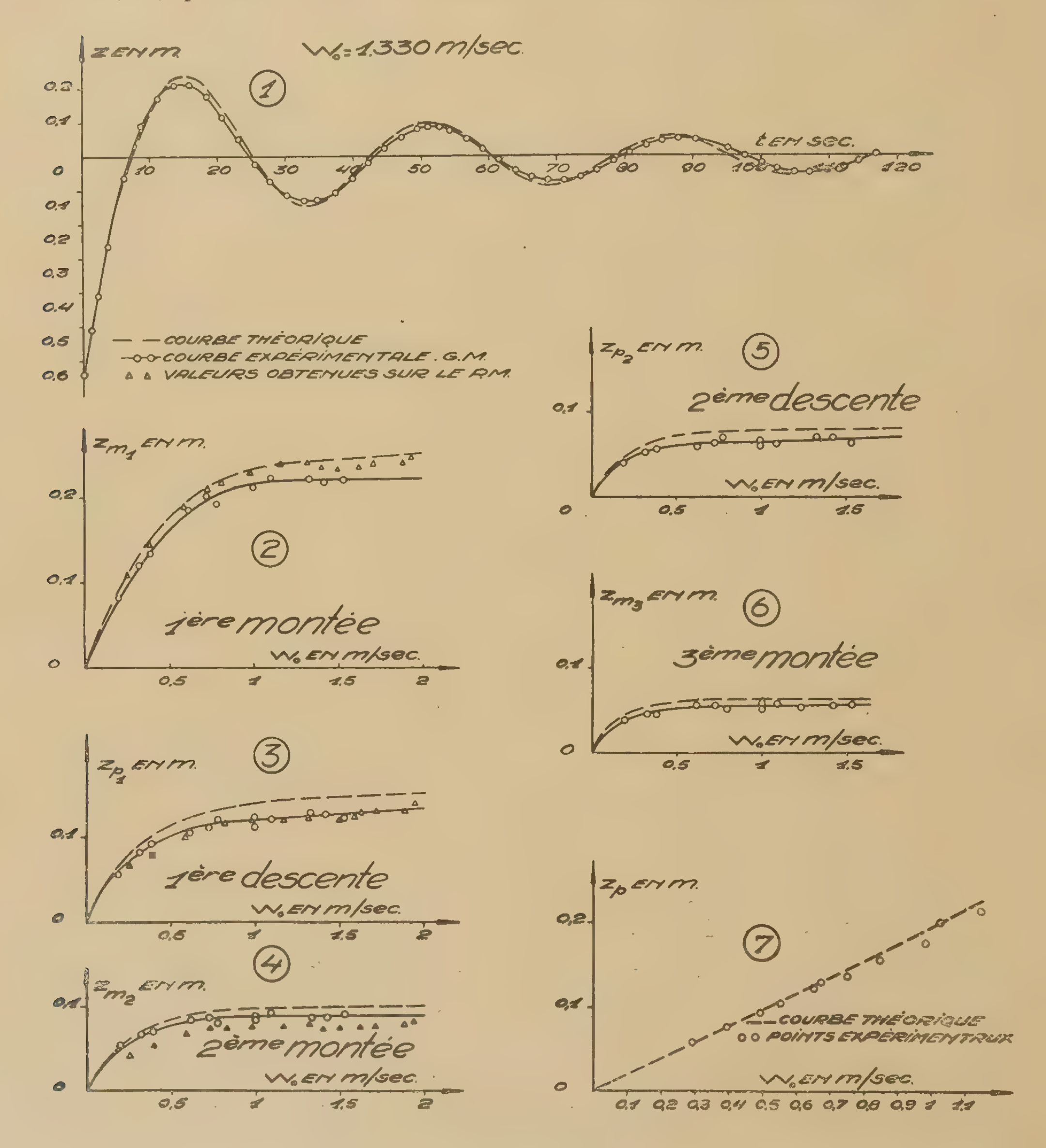
---

(²) G. H. Darwin, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 173, 1882, pp. 187-223; Lord Rayleigh, *Proc. Roy. Soc. London*, A, 77, 1906, p. 486; A. Love, *Some Problems of Geodynamics*, Cambrige, 1911 (2ᵉ édition, 1926), p. 12.

(¹) Séance du 2 mars 1942.

(²) *Comptes rendus*, 213, 1941, p. 768.

paraboliquement, et sa valeur correspond très sensiblement à celle que donne la formule de Borda, en admettant un coefficient de contraction de 0,60, pour la veine noyée issue de l'orifice. Nous avons déduit, de




l'application des lois de similitude, les valeurs correspondantes valables pour le grand modèle.

L'étude théorique a été faite analytiquement, au moyen des construc-

tions graphiques classiques, en tenant compte de la perte de charge dans le canal d'amenée, pour les manœuvres de fermeture, et également de l'influence des variations de la hauteur de chute consécutives aux oscillations du niveau, dans le cas des manœuvres d'ouverture. Nous allons indiquer dans quelle mesure ces prévisions théoriques concordent avec les résultats de nos expériences.

1° *Manœuvres de fermeture complète instantanée.* — La figure 1 donne un exemple de comparaison entre une courbe théorique et une courbe expérimentale de l'oscillation, obtenues dans le grand modèle (avec une position de la vanne correspondant au réglage n° 2), pour une vitesse du régime permanent initial, à l'intérieur du canal d'amenée, $W_0 = 1330$ m/sec. De même, en fonction de $W_0$, les figures 2, 3, 4, 5, 6 donnent la courbe théorique et les valeurs expérimentales des valeurs maxima $Z_m$ ou minima $Z_p$ de la cote Z atteinte par le plan d'eau, au-dessus du niveau statique, dans les montées et les descentes successives. Sur les figures 2, 3 et 4 ont également été reportés, par similitude, les points fournis par le petit modèle; on observe que, sur celui-ci, en raison des valeurs plus faibles des nombres de Reynolds mis en jeu, l'influence prépondérante de la viscosité produit un amortissement beaucoup plus rapide des oscillations. Ces quelques exemples donnent une image fidèle des résultats obtenus dans l'ensemble de nos mesures, résultats qui conduisent aux conclusions suivantes : les amplitudes théoriques sont légèrement supérieures à celles que fournit l'expérience, et la période théorique est un peu inférieure à la période expérimentale.

2° *Manœuvres d'ouverture instantanées.* — L'étude de ces phénomènes montre que les formules théoriques fournissent, pour la descente maxima du plan d'eau, des valeurs très voisines de la réalité; la très légère divergence qui subsiste est dans le sens de la sécurité. Ces résultats apparaissent, par exemple, sur la figure 7; celle-ci donne les amplitudes maxima théoriques et expérimentales de la première descente, $Z_p$, en fonction de la vitesse $W_0$ qui existerait, dans le régime permanent correspondant à l'ouverture réalisée, si le niveau était confondu avec le niveau statique.

3° *Conclusion.* — Ces recherches sur les chambres à étranglement montrent que les prévisions théoriques concordent avec l'expérience, avec le même dégré d'approximation et de sécurité qui caractérise les phénomènes obtenus en l'absence d'étranglement.

PHOTOMÉTRIE STELLAIRE. — *Sur la précision fournie par des observations visuelles d'étoiles brillantes sans photomètre.* Note de M. **Gérard Oriano de Vaucouleurs**, présentée par M. Aimé Cotton.

I. L'observation à l'œil nu des étoiles brillantes est tombée en désuétude depuis que la précision du dixième de magnitude, tenue pour la limite pratique des estimations visuelles sans photomètre, ne peut plus être considérée comme suffisante.

Or, à la suite d'observations visuelles qui paraissent dépasser sensiblement cette limite et à l'instigation de leur auteur M. R. Rigollet [1], j'ai cherché à faire, par comparaisons directes à l'œil nu, des observations d'étoiles brillantes à la fois exactes et précises, c'est-à-dire dont les erreurs systématiques soient aussi réduites que possible et les erreurs accidentelles aussi faibles que le permet la sensibilité différentielle de l'œil.

J'ai été ainsi conduit, pour déterminer la magnitude M d'une étoile visible à l'œil nu (variable ou non) dans un système de magnitudes bien défini (le système photovisuel international de 1922), à appliquer une méthode analogue en son principe à toutes celles qui dérivent de la méthode des degrés et dont l'exposé a été fait ailleurs [2]. Elle consiste essentiellement à estimer les différences de magnitude en degrés voisins de 0,01 *m*, à ne comparer autant que possible que des étoiles ni trop distantes ($d < 20°$), ni trop différentes ($\Delta M < 0,4$), à des distances zénithales modérées ($z < 60°$) et surtout, condition essentielle, à opérer strictement par vision fovéale binoculaire prolongée (nécessairement non simultanée), ce qui limite les observations à $M < 4$ environ.

La réduction tient particulièrement compte de l'absorption atmosphérique, déterminée continuellement par la méthode courte pendant toute la durée de chaque séance d'observation et, si possible, dans l'azimut des étoiles comparées; de l'équation d'échelle (valeur en degrés) déterminée aussi pour chaque séance ou tout au moins très souvent; de l'équation de position convenablement évaluée et corrigée lorsqu'elle n'est pas directement éliminée par symétrie ; de l'équation de couleur exactement déterminée en fonction de M.

---

(1) *B. S. Astrononique de France*, 50, 1936, p. 572. Voir aussi R. Rigollet et G. Oriano, *ibid.*, 52, 1938, p. 419.

(2) G. Oriano, *J. Phys.*, 8e série, 1, 1940, p. 274.

Les catalogues de référence, spécialement étudiés (magnitude et indice de couleur), ne présentent pas d'erreurs accidentelles trop importantes qui nuiraient à la précision des corrections.

Enfin les observations sont aussi fréquentes que possible et forment des séries homogènes couvrant tout l'intervalle des magnitudes accessibles (de $M = 0$ à $M = 4$).

II. J'ai effectué, dans ces conditions, plus de 3000 observations, principalement en 1938, en vue :

1° de corriger les erreurs accidentelles d'un catalogue d'étoiles brillantes (catalogue moyen combinant les valeurs de HR et PD réduites à l'IPv);

2° d'établir des courbes de lumière très précises de certaines variables à faible amplitude.

En ce qui concerne l'objet de cette Note, les résultats principaux sont les suivants. Soient $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ les erreurs moyennes ([3]) respectivement externe (y compris les erreurs systématiques) et interne sur les magnitudes et $\nu$ le nombre d'estimations constituant une mesure.

1° Dans le cas des corrections aux magnitudes cataloguées (déterminations *semi-absolues*), j'arrive à

$$\varepsilon = \pm 0,04; \qquad \varepsilon' = \pm 0,03; \qquad \nu = 3;$$

plus exactement $\varepsilon'$ varie avec M comme il suit :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M ............ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\lvert\varepsilon'\rvert$ ............ | $0,03_5$ | $0,02_5$ | 0,02 | $0,02_5$ | 0,04 |

Ainsi, par exemple, sur 259 résidus, provenant d'un groupe de 18 séances (mai-octobre 1938) et portant sur 43 étoiles de $M = 0,0$ à $M = 4,4$, aucun ne dépasse $\pm 0^m,15$.

Pour comparaison, des observations du même genre effectuées suivant les procédés habituels des associations (AAVSO, AFOEV, etc.) donneraient à peu près

$$\varepsilon = \pm 0,25; \qquad \varepsilon' = \pm 0,12; \qquad \nu = 3$$

et, avec les meilleurs photomètres (absolus) à plages ([4]),

$$\varepsilon = \pm 0,03; \qquad \varepsilon' = \pm 0,01_5; \qquad \nu = 10 \text{ à } 10.$$

2° Dans le cas des observations de certaines variables (déterminations différentielles), j'obtiens

$$\varepsilon' = \pm 0,01_5; \qquad \nu = 4 \qquad (\alpha \text{ UMi}, M = 2,1);$$
$$\varepsilon' = \pm 0,02_5; \qquad \nu = 5 \qquad (\delta \text{ Her}, M = 3,8).$$

---

([3]) Et non les erreurs probables, comme je l'avais écrit par erreur dans le Mémoire cité ([2]).

([4]) J. DUFAY, *Rev. Opt.*, 8, 1929, p. 321.

Cette précision est réelle, car j'ai montré à propos de $\gamma$ Cas [(2), p. 278] que les résultats de deux observateurs différents définissent la même courbe de lumière avec

$$\varepsilon = \pm 0,02_5; \quad \varepsilon' = \pm 0,02; \quad \gamma = 6 \quad (\gamma \text{ Cas, M} = 2,2)$$

et que, d'autre part, mes observations sont en excellent accord avec des mesures photoélectriques, ce qui contrôle objectivement la précision obtenue, car les variations de cette étoile sont irrégulières et imprévisibles.

Pour comparaison, les procédés habituels donneraient approximativement

$$(\varepsilon = \pm 0,15); \quad \varepsilon' = \pm 0,09; \quad \nu = 3,$$

et les meilleurs photomètres différentiels à images ponctuelles [5],

$$\varepsilon' = \pm 0,03; \quad \nu = 40 \quad \text{(polarisation)};$$
$$\varepsilon' = \pm 0,008; \quad \nu = 100 \quad \text{(œil de chat)},$$

mais avec une incertitude de zéro atteignant plusieurs centièmes pour le second.

3. Ainsi ces déterminations de magnitudes obtenues à l'œil nu surclassent très nettement celles qui étaient obtenues jusqu'ici par la méthode des degrés, à laquelle elles font gagner une demi-décimale; elles peuvent soutenir la comparaison avec les résultats des meilleurs photomètres visuels modernes, surtout si l'on tient compte des nombres respectifs de pointés.

Or j'ai obtenu presque tous ces résultats sous le ciel défavorable de Paris, en dépit des méthodes graphiques de réduction employées qui, visant surtout à la simplicité et la rapidité, ne pouvaient donner toute la précision et l'exactitude possibles, et en restant dans le cadre d'une première approximation qui néglige de petites corrections encore appréciables (variation du coefficient d'absorption de l'atmosphère suivant l'indice de couleur, variation de l'équation de position avec la magnitude etc.) dont tiendrait facilement compte une deuxième approximation.

Dès lors il semble permis de considérer que la réalisation pratique à l'œil nu d'observations différentielles telles que

$$\varepsilon = \pm 0,01_5, \quad \varepsilon' = \pm 0,01, \quad \nu = 4 \text{ à } 10,$$

est parfaitement possible, et l'on approche ainsi d'une précision qui semblait réservée à la photométrie photoélectrique.

L'application de ces procédés par un groupement d'observateurs permettrait de combler certaines lacunes de la surveillance photométrique des étoiles brillantes.

---

(5) A. Danjon, *Ann. Obs. Strasbourg*, 2, 1928, p. 1928.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur les interventions thermiques dans les écoulements gazeux cylindriques.* Note [1] de M. **Jean Villey**, présentée par M. Henri Villat.

J'ai signalé [2] une forme très commode que l'on peut donner aux équations de l'écoulement linéaire des gaz parfaits (avec viscosité) dans le cas le plus général. Elles se simplifient pour une canalisation cylindrique (où $\alpha = 0$), et l'on obtient alors

$$\frac{du}{u} = k\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta q}{u^2} + k\frac{\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{T} = k\frac{\gamma-1}{1-k}(1-k\gamma)\frac{\delta q}{u^2} - k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}, \tag{2}$$

$$\frac{dp}{p} = -k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta q}{u^2} - k\gamma\frac{1+k(\gamma-1)}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}. \tag{3}$$

Il est inutile de récrire ici l'équation de $d\rho/\rho = -du/u$. Par contre, on peut donner à l'équation (1) une forme légèrement différente

$$d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = k\frac{\gamma-1}{1-k}\delta q + k\frac{\gamma}{1-k}\delta w, \tag{1'}$$

qui explicite la variation d'énergie cinétique le long de l'écoulement.

Cette équation (1′) n'a rien de commun avec une équation de conservation de l'énergie. Les facteurs d'action $\delta q$ et $\delta w$, qui y figurent, provoquent des modifications de l'énergie interne et du travail de détente $p\,dv$, en même temps que du travail moteur $-v\,dp$. Il n'est donc pas plus paradoxal de voir, aux vitesses supersoniques ($1-k<0$), une diminution progressive de l'énergie cinétique liée à un apport de chaleur ($\delta q > 0$), que de retrouver, par la même équation, un résultat connu : aux vitesses subsoniques, dans un écoulement adiabatique avec frottement, la vitesse va en croissant.

Ces équations ne donnent le sens de variation des grandeurs étudiées que si l'on connaît la relation qui existe entre les deux facteurs d'action $\delta q$

---

(1) Séance du 2 mars 1942.

(2) *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 1471. Nous utilisons ici la notation $u$ (au lieu de V) pour la vitesse d'écoulement, et les notations $\delta q = q(x)\,dx$ et $\delta w = w(x)\,dx$ pour la quantité de chaleur reçue et la quantité d'énergie dissipée dans l'unité de masse sur le parcours $dx$. On représente toujours par $\gamma$ le rapport C/$c$, et par $k$ le carré $u^2/v^2$ de la vitesse réduite (rapportée à la célérité du son).

et $\delta w$. On notera que, dans les écoulements rapides, il est fort difficile de faire des échanges de chaleur $\delta q$ importants. Par contre on peut assez facilement créer de l'énergie thermique dans la masse gazeuse elle-même par des réactions chimiques, ce qui est l'équivalent d'apports $\delta q$ positifs.

Il est néanmoins intéressant de définir les interventions thermiques qui réalisent certains cas simples d'écoulement.

On a d'abord les écoulements adiabatiques ($\delta q = 0$), et les écoulements isentropiques par compensation ($\delta q = -\delta w$).

Pour obtenir un écoulement isotherme, c'est-à-dire aussi à énergie interne constante, il faut annuler $d\mathrm{T}/\mathrm{T}$, ce qui donne

$$\frac{k}{u^2}\frac{\gamma-1}{1-k}[(1-k\gamma)\,\delta q - k\gamma\,\delta w] = 0 \quad \text{ou} \quad \delta q = \frac{k\gamma}{1-k\gamma}\delta w \quad (^3).$$

L'écoulement isobare correspondra à $dp/p = 0$, qui donne

$$-\frac{k}{u^2}\frac{\gamma}{1-k}[(\gamma-1)k\,\delta q + (1+k(\gamma-1))\,\delta w] = 0 \quad \text{ou} \quad \delta q = -\frac{1+k(\gamma-1)}{k(\gamma-1)}\delta w.$$

Enfin l'écoulement sera à vitesse constante, ce qui correspond aussi à la densité constante, si l'on a $du/u = 0$ ou $\delta q = -(\gamma/\gamma-1)\,\delta w$.

En tenant compte de ces relations, on obtient le tableau de valeurs suivant :

| Nature de l'écoulement | $\frac{du}{u}$. | $\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$. | $\frac{dp}{p}$. |
|---|---|---|---|
| adiabatique | $k\frac{\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$ | $-k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$ | $-k\gamma\frac{1+k(\gamma-1)}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$ |
| isentropique | $\frac{k}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$ | $-k\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$ | $-k\frac{\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$ |
| isotherme | $\frac{k\gamma}{1-k\gamma}\frac{\delta w}{u^2}$ | 0 | $-\frac{k\gamma}{1-k\gamma}\frac{\delta w}{u^2}$ |
| isobare | $-\frac{\delta w}{u^2}$ | $-\frac{\delta w}{u^2}$ | 0 |
| vitesse constante | 0 | $-k\gamma\frac{\delta w}{u^2}$ | $-k\gamma\frac{\delta w}{u^2}$ |

Toutes les variations sont ainsi définies en fonction de $\delta w/u^2$ (4).

(3) $\delta q$ devient négatif pour $k > 1/\gamma$; nous retrouvons là la limite du domaine d'inversion de l'effet thermique d'un apport de chaleur signalé par M. Jouguet (*Comptes rendus*, 194, 1932, p. 213).

(4) Qui représente, au facteur 1/2 près, la fraction de l'énergie cinétique présente qui se décoordonne le long du parcours $dx$ considéré.

En toute rigueur, les calculs devraient être conduits séparément pour chaque nappe comprise entre deux cylindres coaxiaux de rayons $r$ et $r+dr$; mais nous admettons, à titre d'approximation, que l'on peut considérer la section du tuyau comme homogène, $u$ étant égal à la vitesse moyenne d'écoulement dans cette section; $\delta w/u^2$ est alors connu, en fonction de la densité $\rho$, de la viscosité $\mu$ et du diamètre $d$ du tube, par l'étude expérimentale des écoulements dans des canalisations cylindriques courtes, où la vitesse et l'état peuvent être considérés comme pratiquement indépendants de $x$.

Les résultats obtenus pour les écoulements turbulents sont représentés avec une très bonne précision par la loi invariante de Blasius

$$\lambda = 0,3164\,\mathrm{R}^{-0,25},$$

où les deux grandeurs sans dimensions $\lambda$ et R sont définies par les relations

$$-\frac{dp}{dx} = \lambda\frac{\rho u^2}{2d} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R} = \frac{\rho u d}{\mu}.$$

Cela donne

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\rho u^2}{2d} \times 0,3164 \times \frac{\mu^{0,25}}{\rho^{0,25}u^{0,25}d^{0,25}} = \frac{0,1582}{d^{1,25}}\rho^{0,75}u^{1,75}\mu^{0,25}.$$

Or la résultante $F_x$ des forces de frottement de la paroi entre les sections $s_1$ et $s_2$ est égale et opposée à la résultante $-(dp/dx)(x_2-x_1)s$ des pressions terminales. En raisonnant par rapport à des axes entraînés par le fluide, cette résultante fournit, dans le déplacement relatif $dx$, le travail $-F_x\,dx$, entièrement dissipé dans la masse $s(x_2-x_1)\rho$, ce qui donne

$$-\frac{dp}{dx}(x_2-x_1)s\,dx = s(x_2-x_1)\rho\,\delta w,$$

d'où

$$\delta w = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{dx}{\rho} = \frac{0,1582}{d^{1,25}}\rho^{-0,25}u^{1,75}\mu^{0,25}\,dx$$

et, en introduisant la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$,

$$\frac{\delta w}{u^2} = \frac{0,1582}{d^{1,25}}\frac{\nu^{0,25}}{u^{0,25}}dx.$$

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur l'origine des piqûres observées dans certains dépôts métalliques électrolytiques.* Note de M. **Georges Thomas** (Extrait).

La présence dans les électrolytes de matières grasses finement divisées déterminant souvent la formation de piqûres dans les dépôts galvaniques, il suffit dès l'apparition des piqûres, de détruire les particules graisseuses au sein même de l'électrolyte, pour voir disparaître l'inconvénient observé. On y parvient aisément en ajoutant à l'électrolyte du permanganate de potasse en solution aqueuse, de telle façon que la dose de permanganate corresponde à 10 ou $15^{cg}$ par litre d'électrolyte, puis en portant la température du bain à 90° C. pendant un quart d'heure, ou à défaut en le brassant énergiquement à froid pendant 4 heures.

ÉLECTROCHIMIE. — *Activité individuelle des ions* $Tl^+$ *et* $N_3^-$ *dans les solutions d'azoture de thallium.* Note [1] de M^me^ **Marie-Louise Brouty**, présentée par M. Jacques Duclaux.

Les coefficients d'activité des ions $Tl^+$ et $N_3^-$, dans les solutions d'azoture de thallium à différentes concentrations, sont déterminés expérimentalement par la méthode des f. é. m.

Les mesures sont effectuées à 25° sur les chaînes

(I) — Tl (amalgame 2 phases) | $N_3Tl\,c$ | KCl sat. | KCl 0,1 N | AgCl | Ag +,

(II) + Ag | $N_3Ag$ | $N_3Tl\,c$ | KCl sat. | KCl 0,1 N | AgCl | Ag —.

La f. é. m. de ces piles est, en négligeant le potentiel de jonction,

$$E_{(I)} = E_{0Tl^+} - \frac{RT}{F}\,\mathrm{Log}\,cf_+ + E_{(Ag\,|\,AgCl)},$$

$$E_{(II)} = E_{0N_3^-} + \frac{RT}{F}\,\mathrm{Log}\,cf_- + E_{(Ag\,|\,AgCl)}.$$

E(Ag/AgCl) représente le potentiel de l'électrode de référence, $E_{0Tl^+}$ et $E_{0N_3^-}$, les potentiels normaux du thallium dans l'amalgame de thallium, et de l'ion $N_3^-$ (activité = 1), *c*, la concentration, $f^+$ et $f^-$, les coefficients d'activité individuels des ions $Tl^+$ et $N_3^-$.

---

[1] Séance du 23 février 1942.

La méthode de mesure, la préparation des produits et des électrodes, ainsi que la méthode de détermination de $E_0$ ont été précédemment décrites [2]. Les résultats des mesures sont donnés dans le tableau suivant

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_3Tl$(*)... | 0,0145. | 0,0096. | 0,0072. | 0,0051. | 0,0029. | 0,0023. | 0,0019. | 0,0012. | 0,0010. |
| $E_{Tl^+}(10^{-4})$ V. | +4473 | 4573 | 4644 | 4721 | 4861 | 4917 | 4960 | 5084 | 5133 |
| $E_{N_3^-}(10^{-4})$ V. | −4062 | 4166 | 4237 | 4316 | 4460 | 4517 | 4567 | 4698 | 4741 |
| $f^+$......... | 0,833 | 0,849 | 0,866 | 0,883 | 0,918 | 0,929 | 0,936 | 0,954 | 0,958 |
| $f^-$......... | 0,911 | 0,918 | 0,926 | 0,932 | 0,943 | 0,951 | 0,954 | 0,966 | 0,969 |

(*) C mol-g/l. sol.

Les courbes représentant les variations de la quantité

$$E'_0 = E + \frac{RT}{F}\log c$$

en fonction de $\sqrt{2c}$ sont très différentes pour chacun des ions. Comme le montre la figure ci-après, la courbe relative à $N_3^-$ possède une portion rectiligne suffisamment étendue $(0{,}030 < \sqrt{2c} < 0{,}080)$ pour permettre l'extrapolation de Lewis. On obtient pour $E_{0_{N_3^-}}$ la valeur $-2948 \pm 1.10^{-4}$ V, et la pente est celle prévue par la théorie de Debye ($211.10^{-4}$ V). La courbe correspondant à $Tl^+$ présente également une portion rectiligne; l'extrapolation de Lewis conduit à la valeur $E_{0_{Tl^+}} = 3334.10^{-4}$ V, très nettement inférieure au potentiel normal de $Tl^+$ déterminé dans des solutions de TlCl [3] et de plus la pente ne correspond pas à celle de Debye. Il faut donc avoir recours à la méthode de La Mer. On obtient alors pour $E_{0_{Tl^+}}$, $3339.10^{-4}$ V, valeur en bon accord avec celles de la littérature, correspondant à un rayon ionique $a = 0{,}6$ Å.

Le calcul de La Mer conduit pour $N_3^-$ à la valeur $E_0 = -2950.10^{-4}$ V, qui diffère au plus de $2.10^{-4}$ V de celle obtenue par l'extrapolation de Lewis; le rayon correspondant est $a = 8{,}5$ Å.

Les valeurs de $f+$ et $f-$, calculées d'après ces valeurs de $E_0$, sont données dans le tableau ci-dessus.

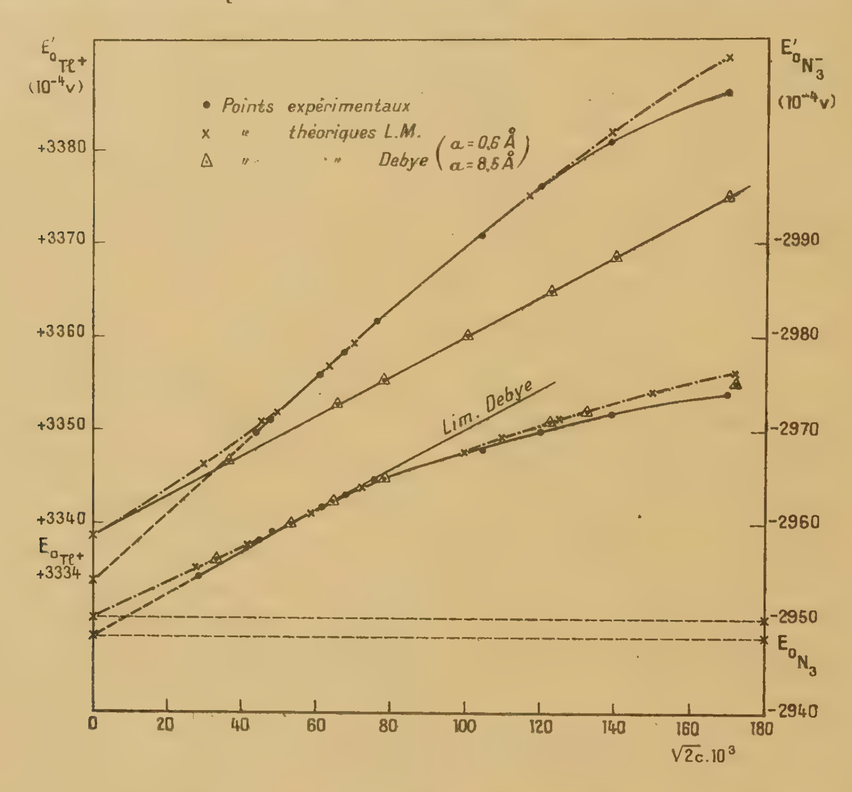
La confrontation des résultats expérimentaux avec la théorie permet, comme le montre la figure, de conclure qu'en ce qui concerne les grandeurs individuelles des ions (potentiel normal, rayon ionique, coefficient

---

(2) *Comptes rendus*, 214, 1942, p. 258.

(3) G. N. Lewis et Randall, *Thermodynamics and the Free Energy of Chemical Substances*, New-York, 1923.

d'activité), la théorie de Debye-Huckel, dans sa forme généralisée par Gronwall, La Mer et Sandved, rend compte des phénomènes d'une manière satisfaisante pour un domaine de concentration allant des solu-




tions les plus diluées jusqu'à 0,01 M au moins, et que le domaine de la validité de la théorie de Debye ne semble dépendre que de la grosseur des ions.

Le fait que les ions d'un électrolyte tel que $N_3Tl$ aient des dimensions aussi dissemblables peut permettre d'expliquer les écarts observés précédemment, entre les valeurs expérimentales et celles calculées, en utilisant pour la détermination du $E_0$ de la pile sans transport la formule de La Mer qui postule essentiellement l'égalité des rayons ioniques. Il convient alors de calculer $\log f$ directement à partir des valeurs de $\log f^+$ et $\log f^-$ par la relation

$$\log f = \frac{1}{2}(\log f^+ + \log f^-).$$

La valeur de $E_0$ ainsi obtenue pour la pile sans transport, $6291 \pm 1.10^{-4}$ V,

est en bon accord avec celle de l'extrapolation de Lewis ($6290 \pm 2$) et celle (6289) que l'on déduit de la relation

$$E_{0\,\text{pile sans transport}} = E_{0_{Tl^+}} - E_{0_{N_3^-}}.$$

PHYSIQUE APPLIQUÉE. — *Relations entre les altérations des revêtements protecteurs de l'acier et les variations d'une force électromotrice.* Note [1] de MM. **Antony Vila** et **Raoul Desalme**, présentée par M. Aimé Cotton.

I. L'appréciation de la valeur d'un revêtement protecteur de l'acier est généralement basée sur le comportement d'une éprouvette soumise à une usure définie.

Afin de diminuer la durée d'un essai déjà réduit à quelques semaines, nous avons cherché à déceler la corrosion à son début, alors qu'elle est encore invisible, en utilisant la sensibilité des mesures électriques.

Nos premiers essais, où nous mesurions des résistances et des débits, avec des dispositifs comprenant dans la chaîne conductrice ou dans le couple une éprouvette d'acier peint, ayant échoué, nous avons cherché à mesurer la force électromotrice d'un couple sans être gênés par le phénomène de polarisation. On réalise une pile à grande résistance intérieure, dans laquelle la solution saline est remplacée par de l'eau pure et le charbon par un métal restant inaltéré. L'oxydation de l'acier, à son début, est décelée par une variation du potentiel d'un couple platine-acier protégé, mesurée par la méthode de Poggendorf.

En associant ces mesures de forces électromotrices à un procédé de vieillissement artificiel, on peut tracer des diagrammes représentant les variations de potentiel des éprouvettes d'acier soumises à cette épreuve. L'allure et les singularités de ces diagrammes caractérisent les revêtements examinés et permettent d'établir des comparaisons avec des types de produits connus.

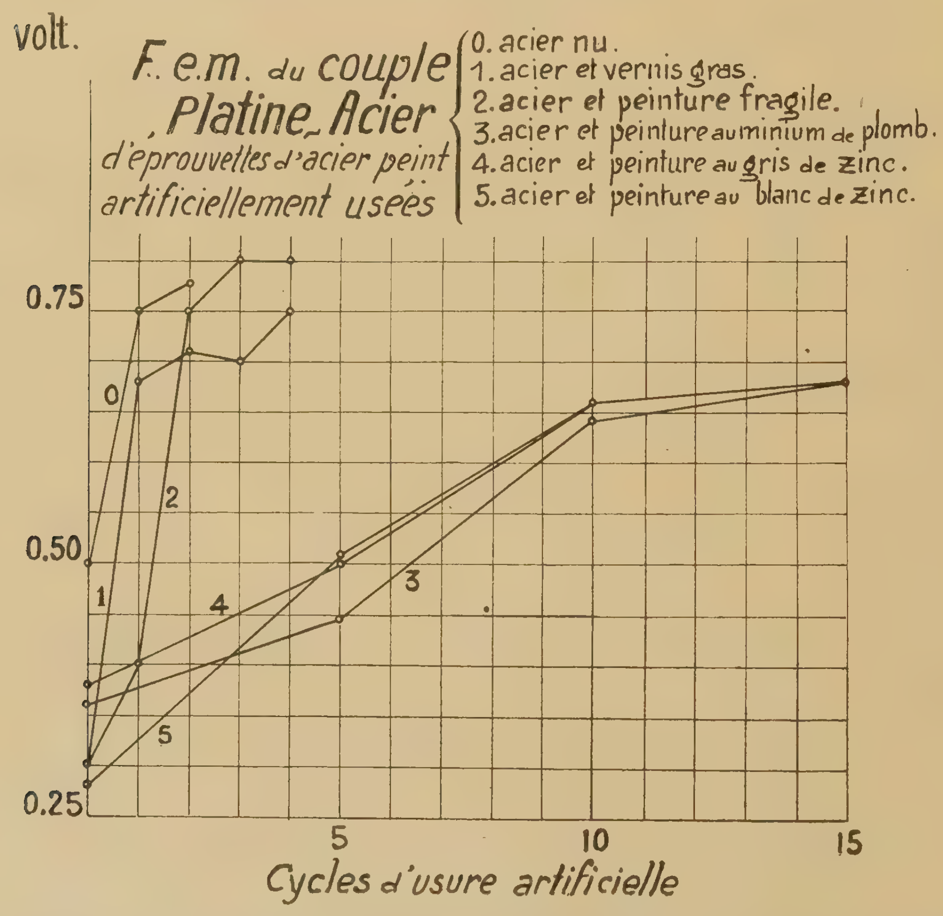
Ces mesures établissent un document objectif; de plus elles offrent l'avantage d'abréger la durée des essais de vieillissement artificiel en décelant l'altération du revêtement avant que les corrosions ou les détériorations de l'éprouvette d'acier protégé soient visibles à la loupe.

II. L'élément de pile utilisé comprend une éprouvette cylindrosphérique

---

[1] Séance du 2 mars 1942.

($10 \times 100^{mm}$) d'acier Thomas poli, dégraissé, revêtue de son film protecteur, associée à une électrode de platine (fil de 10/10 de millimètre). Ces deux électrodes sont plongées également dans les deux branches d'un tube en U en verre pyrex dans lequel circule lentement un courant d'eau pure récemment distillée. On détermine la force électromotrice de cette pile par une méthode de zéro en utilisant un élément Weston (1,0185 volt) opposé au couple étudié; en outre le circuit comprend un potentiomètre et un galvanomètre à miroir Deprez-d'Arsonval.




L'équilibre du système s'obtient en réglant le débit de la source auxiliaire (accumulateur de 4 volts) par la manœuvre d'un combinateur de résistances variables étalonnées en subdivision du volt jusqu'à $10^{-4}$ volt. A une première série de mesures effectuées sur le revêtement neuf succèdent, à quelques jours d'intervalle, des séries de mesures prises sur

l'éprouvette vieillie artificiellement par plusieurs cycles d'usure expérimentale dans un appareil spécialement construit pour cet usage ([2]). Chaque cycle d'épreuves comprend quotidiennement : une fatigue thermique (un gel à — 6° et des alternances d'échauffements à + 75° C. par la chaleur sèche et humide et de refroidissements à 15° pendant 6 heures), un séjour de 3 heures en atmosphère sulfureuse (à 2 % de $SO^2$ en volume), et une immersion dans l'eau de mer artificielle pendant 14 heures, en partie nocturnes. Les mesures de potentiel sont faites le lendemain des épreuves toutes les heures jusqu'à équilibre; seules les dernières valeurs sont retenues. Elles décèlent la corrosion du subjectile vers le 5ᵉ jour d'usure quand le film est fragile; vers le 15ᵉ ou le 20ᵉ, lorsqu'il est de longue ou de très longue durée.

III. Les résultats obtenus par cette méthode avec quelques peintures et vernis usuels appliqués sur acier sont représentés ci-contre :

Avec les revêtements perméables à l'eau, le film perd sa qualité isolante dès les premiers cycles d'épreuves : l'eau, l'oxygène et les réactifs du milieu extérieur pénètrent le film, arrivent au contact du métal et le corrodent. A ce moment le potentiel de l'éprouvette s'élève, la f. é. m. atteint une valeur voisine de 0,800 volt, tension de dissolution du fer en présence du platine. Les tracés des diagrammes se dressent brusquement.

Les éprouvettes d'acier protégé par des peintures antioxyde résistent longtemps aux épreuves, les tracés des diagrammes s'élèvent progressivement; quinze à vingt cycles d'usure artificielle ne suffisent pas toujours pour atteindre la valeur limite qui marque la perméabilité à l'eau du revêtement.

Nous poursuivons cette étude en appliquant le même dispositif expérimental à des couples dans lesquels l'acier est remplacé par des métaux légers et le platine par de l'acier inoxydable.

## MAGNÉTISME. — *Sur l'anisotropie magnétique du caoutchouc.*

Note ([1]) de Mᵐᵉ Eugénie Cotton, née Feytis, présentée par M. Aimé Cotton.

Au cours d'expériences sur les propriétés magnétiques de certains cristaux, j'avais suspendu l'un d'entre eux entre les pièces polaires d'un petit

([2]) A. Vila, *Recherches et inventions*, mars 1936, 17, n° 298, p. 79.

([1]) Séance du 2 mars 1942.

électroaimant. Ces pièces étaient plates, du même diamètre que les noyaux ($5^{cm}$), l'entrefer variait de 1,5 à $4^{cm}$ et le champ au centre de 8800 à 5500 gauss. Le cristal était suspendu à un fil de soie de très faible torsion par l'intermédiaire d'un petit anneau de caoutchouc obtenu en coupant un tuyau à gaz perpendiculairement à sa longueur. J'observai, sitôt le champ établi, que l'équipage s'orientait fortement, le couple dépassant en importance celui que j'attendais. Je m'aperçus que ce couple subsistait lorsqu'on enlevait le cristal et que l'anneau de caoutchouc restait seul en cause.

On observe le même phénomène sur un anneau de caoutchouc paramagnétique et sur un anneau de caoutchouc diamagnétique, que l'échantillon soit souple ou qu'il soit devenu cassant, que l'anneau soit complet ou qu'il présente une coupure. Au lieu d'anneaux plats on peut suspendre dans le champ des morceaux de tuyaux plus longs, de 2 à $3^{cm}$ par exemple. Il est alors particulièrement frappant de voir que ces tubes se disposent toujours axialement dans le champ employé, alors que dans ces conditions des corps isotropes allongés ne s'orientent ainsi que s'ils sont paramagnétiques.

Les expériences précédentes étaient faites avec des caoutchoucs commerciaux : ces substances ont subi la vulcanisation; en outre elles renferment souvent des matières étrangères; enfin pendant leur fabrication elles ont été soumises à des actions mécaniques variées. Pour ces raisons j'ai expérimenté sur du caoutchouc obtenu par simple coagulation du latex. En mettant ce latex dans un petit tube cylindrique de verre (long. $25^{mm}$, diam. $6^{mm}$ env.) et en ajoutant une goutte d'acide acétique, on obtient facilement de petits barreaux qu'on peut suspendre dans l'entrefer par leur milieu. On constate que le coagulum, diamagnétique comme le latex, s'oriente diamétralement dans le champ comme le fait, dans les mêmes conditions, un barreau d'un corps isotrope diamagnétique. Mais il n'en est plus de même après que le cylindre a été soumis à une traction suffisante pour lui laisser un allongement permanent. Par exemple, dans une expérience, un cylindre a été attaché par ses deux extrémités à deux anneaux d'os et soumis à une force de $1^{kg}$ pendant 36 heures (température 6°); sa longueur, qui était de $2^{cm}$, est devenue $7^{cm},8$. Une portion de ce cylindre étiré, examinée comme précédemment, s'est alors orientée à 60 degrés des lignes de force. Un autre petit cylindre de latex coagulé a été *rackë*, c'est-à-dire qu'il a été étiré dans de l'eau chaude puis plongé immédiatement dans de l'eau froide, ces deux opérations successives étant répétées à plusieurs reprises. Un cylindre allongé de la sorte,

suspendu aussitôt dans le champ, s'est placé parallèlement aux lignes de force.

Des cylindres plus gros de latex coagulé (de $1^{cm},5$ de diamètre par exemple) ont été comprimés avec une presse, soit en les laissant s'aplatir, soit en les entourant d'un moule en bois pour qu'ils gardent leur forme cylindrique. En les suspendant dans le champ horizontal de façon que la direction suivant laquelle s'est exercée la compression soit elle-même horizontale, on constate cette fois, dès qu'on établit le champ, que cette direction se place perpendiculairement aux lignes de force.

Ces expériences sur le latex coagulé rendent compte des expériences analogues que l'on peut faire sur des échantillons de caoutchouc commercial qui ont été soumis, soit pendant leur fabrication, soit après, à des actions mécaniques énergiques. Quelle que soit la composition des échantillons en cause, leur caractère para ou diamagnétique, nous avons toujours constaté que la direction suivant laquelle ils sont restés étirés tend à se placer parallèlement aux lignes de force, tandis que la direction suivant laquelle ils sont restés comprimés se dispose à angle droit de ces lignes. On constate en outre que la grandeur des couples d'orientation croît avec l'importance de la déformation. C'est ainsi qu'en enroulant un bracelet de caoutchouc auquel on fait faire un nombre variable de tours suivant le diamètre d'un disque de liège suspendu horizontalement dans le champ, on observe que la durée d'oscillation de l'équipage, dont le moment d'inertie demeure sensiblement constant, grandit avec le nombre de tours.

Ces faits sont à rapprocher d'expériences un peu oubliées que faisait J. Tyndall (²), il y a près de cent ans, sur les modifications des propriétés magnétiques de diverses substances soumises à la compression. Quand il opérait avec de la cire, qui est diamagnétique, ou avec un cube obtenu en comprimant de la poudre de bismuth, qui est également diamagnétique, il trouvait la règle qui a été énoncée ci-dessus pour l'orientation dans le champ. Avec la poudre d'une substance paramagnétique (sidérose), la direction de compression se plaçait cette fois suivant les lignes de force. Dans le cas actuel, si le résultat est le même, que le caoutchouc soit para- ou diamagnétique, c'est sans doute parce que la substance qui possède les propriétés élastiques est diamagnétique : c'est la charge surajoutée qui rend parfois l'ensemble attirable par un pôle d'aimant.

L'explication de cette anisotropie magnétique est sans doute à chercher

(²) *Researches on Diamagnetism and Magne-Crystallic action*, Londres, 1870.

dans la répartition non homogène des éléments matériels de la substance étirée ou comprimée. C'est de cette manière qu'on explique certains phénomènes déjà connus présentés par le caoutchouc, la biréfringence d'une lame tendue et les figures obtenues au moyen des rayons X ou par diffraction électronique.

L'anisotropie magnétique du caoutchouc naturel se retrouve dans le caoutchouc synthétique, ainsi que j'ai pu le constater. D'autres matières plastiques, différentes du caoutchouc, la présentent également; je l'ai observée sur le plexiglas, par exemple. Comme cette propriété est facile à constater et à mesurer, elle pourrait peut-être servir à chercher si deux objets qui paraissent être pareils ont été fabriqués de la même façon ou soumis aux mêmes actions mécaniques.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur un maximum de solubilité de l'anhydride borique dans l'acide nitrique concentré.* Note [1] de M. **Félix Trombe**, présentée par M. Paul Lebeau.

La solubilité de l'acide borique ($BO^3H^3$) dans l'eau est influencée par l'addition de différents corps organiques ou minéraux. Hertz [2] a indiqué, entre autres, que l'addition des acides chlorhydrique, sulfurique, nitrique abaisse cette solubilité. Dans le cas particulier de l'acide nitrique, la concentration maximum en $NO^3H$ des mélanges étudiés par Hertz était de 60 %.

J'ai été conduit, dans le but de traiter la cellulose par les mélanges nitroboriques, à préparer des solutions d'anhydride borique, dans des acides à concentrations croissantes, de 70 à 100 % en poids de $NO^3H$. Les solubilités de l'anhydride borique, qui augmentent avec la température, sont alors beaucoup plus élevées que dans les mélanges dilués.

Afin de préciser ces résultats, l'étude des solubilités de $B^2O^3$ dans l'ensemble des mélanges eau-acide nitrique (de 0 à 100 % de $NO^3H$) a été reprise.

L'acide nitrique de titre connu est placé dans un flacon rodé maintenu à température constante (30° pour la plupart des essais). L'anhydride

(1) Séance du 16 février 1942.

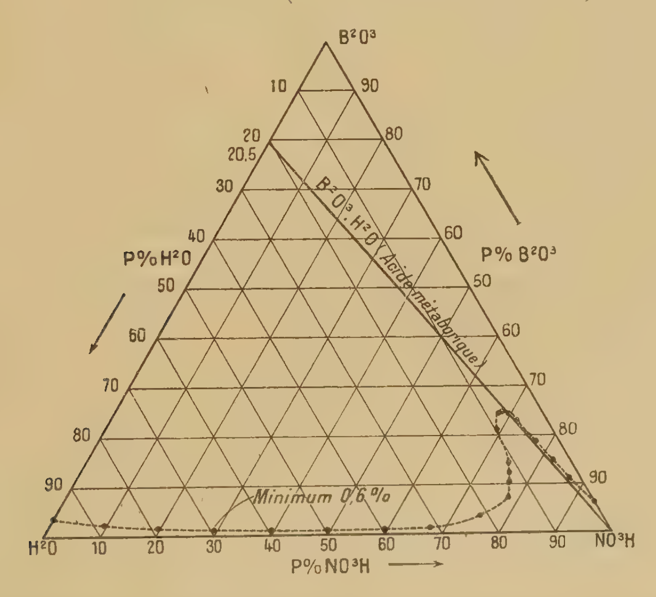
(2) *Zeits. anorg. Chem.*, **33**, 1903, p. 355; **34**, 1903, p. 205; **65**, 1910, p. 341; **66**, 1910, pp. 93-358; **67**, 1910, p. 365; **68-69**, 1910, p. 165; **71**, 1911, p. 206; **72**, 1911, p. 106; **73**, 1912, p. 274.

borique, fondu et transparent, pulvérisé très fin, est ajouté par petites portions, jusqu'à obtention d'une faible quantité d'insoluble permanent. La solution décantée dans un creuset taré est évaporée au bain-marie puis chauffée à 360° C. à poids constant. L'anhydride borique dissous est dosé en présence de glycérine et de phénolphtaléine. Dans les solutions très riches en eau, une petite partie de l'anhydride est condensée avec les eaux faiblement nitriques; une deuxième évaporation permet d'en recueillir la presque totalité. Le titre initial de la solution nitrique est vérifié par dosage de l'acide évaporé.

Cette méthode donne, à moins de 1 % près, le poids d'anhydride borique en solution.

Les résultats obtenus permettent (voir la figure) les conclusions suivantes :

1° *Entre* 0 *et* 60 % *de* $NO^3H$ (*titre initial de l'acide*), on observe un




minimum de solubilité de l'anhydride borique, 0,6 %, pour une concentration voisine de 30 % de $NO^3H$. La courbe de solubilité de l'anhydride, calculée en acide borique, coïncide sensiblement avec celle de Hertz ([2]). L'anhydride se dissoudrait donc sous forme d'acide orthoborique $BO^3H^3$.

2° *Entre* 60 % *et* 91 % *de* $NO^3H$, la solubilité, d'abord constante et égale à 0,95 %, croît considérablement et atteint 25 %. Dans la partie montante de la courbe l'addition à la solution nitrique d'un excès d'anhydride borique augmente la solubilité de ce dernier. Des essais systématiques

permettent de penser que l'anhydride borique se conduit dans cette région de la courbe comme un déshydratant des solutions nitriques.

3° *Entre* 91 % *et* 100 % *de* $NO^3H$, la solubilité décroît, d'abord lentement, puis rapidement; à partir de 94 %, la courbe de solubilité est parallèle à la droite représentant le rapport stœchiométrique $B^2O^3/H^2O$ (acide métaborique). Dans cet intervalle, le poids d'anhydride borique qui passe en solution est proportionnel, à une quantité constante près, au poids d'eau contenu dans l'acide nitrique, et dans le rapport $B^2O^3/H^2O$. Tout se passe comme si, à une solubilité constante près, assez faible (1,5 à 2 %), de l'anhydride borique, se superposait la dissolution de la totalité de l'acide métaborique formé par fixation de l'eau libre de la solution. Cette hypothèse est confirmée : 1° par le fait qu'un acide à 100 % de $NO^3H$, légèrement dissocié, contient en réalité une faible proportion d'anhydride azotique et d'eau permettant encore la formation d'acide métaborique; 2° par la faible solubilité (inférieure à 2 %) de l'anhydride borique dans les solutions contenant 2 à 3 % d'anhydride azotique libre (acide à 100 % additionné d'anhydride azotique).

*En résumé*, d'après les essais effectués à 30° C., les solutions nitroboriques contiendraient soit de l'acide orthoborique ($NO^3H$ inférieur à 60 %), soit un équilibre d'acide méta et d'acide orthoborique ($NO^3H$ compris entre 60 et 94 %); soit, à partir de 94 %, de l'acide métaborique et une faible quantité, constante d'ailleurs, d'anhydride borique. La solubilité maximum, qui croît avec la température, est, à 30° C., de 25 % pour un titre initial de l'acide de 91 % en $NO^3H$.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la réduction de la vapeur d'eau par l'aluminium en présence de traces de mercure.* Note de MM. **Louis Hackspill** et **Raymond Rohmer**, présentée par M. Delépine.

L'un de nous a étudié la réduction de la vapeur d'eau par le magnésium à l'état de grande pureté [1].

De 0° à 45° il y a formation de magnésie hydratée $Mg(OH)^2$, cristallisée, analogue à la brucite; au-dessus de 180°, l'oxyde anhydre MgO prend naissance. Entre 45° et 180°, le métal ne réagit pas sur la vapeur d'eau.

---

(1) L. Hackspill, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 6, 1939, p. 458.

L'aluminium pur (titrant plus de 99,9 %) ne réduit pas la vapeur d'eau à froid. Par contre, on sait depuis longtemps qu'une lame légèrement amalgamée, soumise à l'action de l'air humide, se recouvre rapidement d'une épaisse couche d'alumine hydratée.

Pour avoir des expériences comparables entre elles, nous avons utilisé des lames soumises pendant une centaine d'heures dans le vide, à l'action de la vapeur saturante du mercure, voisine, à la température ordinaire, du millième de millimètre. La quantité de métal lourd ainsi fixé est impondérable. Elle est inférieure au dixième de milligramme pour $100^{cm^2}$ de surface d'aluminium. Cette proportion est suffisante pour provoquer la formation d'alumine dès la température ordinaire et même au-dessous de cette température, lorsque la vapeur d'eau est introduite dans l'appareil où a lieu l'amalgamation.

Il se produit en même temps un dégagement d'hydrogène que l'on peut suivre, dès son origine, à l'aide d'une jauge de Mac Léod.

L'expérience a été répétée un certain nombre de fois en utilisant la tension fixe de la vapeur émise par de l'eau maintenue à 15°, et en faisant varier la température de la lame d'aluminium. Nous avons ainsi observé les faits suivants :

1° Entre 20° et 90°, la vitesse de la réaction diminue lorsque la température augmente;

2° Le dégagement d'hydrogène s'arrête complètement à 90° pour ne reprendre qu'au-dessus de 210°;

3° L'oxyde formé est d'une extrême légèreté, d'une densité apparente très faible. Il est constitué par de l'alumine hydratée amorphe aux rayons X, de formule $Al^2O^3, nH^2O$, $n$ étant variable d'une expérience à l'autre, mais toujours supérieur à 3, et tendant vers 3 lorsque le produit est maintenu dans le vide pendant plusieurs semaines.

L'explication la plus simple consiste à admettre que les choses se passent comme dans le cas du magnésium. On se trouverait en présence de deux réactions bien distinctes : la première, se produisant à la température ordinaire à 90,

$$(1) \qquad 2Al + (n+3)H^2O \rightarrow Al^2O^3, nH^2O + 3H^2;$$

la seconde, au-dessus de 210°,

$$(2) \qquad 2Al + 3H^2O \rightarrow Al^2O^3 + 3H^2.$$

Si la réaction (1) est bien conforme à la réalité des faits, il n'en va pas de même de la seconde.

En effet, lorsqu'on élève progressivement la température, entre 20° et 210°, en présence de vapeur d'eau, l'alumine hydratée formée tout d'abord se déshydrate progressivement, mais très lentement, de sorte qu'il reste encore au-dessus de 210° de l'eau combinée.

A partir de cette température, ce n'est pas la vapeur de l'atmosphère ambiante, mais de l'eau ou même probablement des ions (OH) déjà liés à l'aluminium qui réagissent. Ainsi une lame d'aluminium amalgamée, portée à une température supérieure à 210° et mise au contact de la vapeur d'eau, ne donne lieu à aucun dégagement gazeux appréciable, tandis que l'hydrogène est rapidement mis en liberté lorsqu'on porte dans le vide, à cette même température, une lame recouverte d'alumine hydratée.

L'équation (II) doit donc être remplacée par l'une des suivantes :

$$\text{(III)} \qquad Al + Al(OH)^3 \rightarrow Al^2O^3 + \frac{3}{2}H^2$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad Al + 3AlO^2H \rightarrow 2Al^2O^3 + \frac{3}{2}H^2.$$

En réalité la première lame, celle qui n'a pas subi l'oxydation à la température ordinaire, subit aussi une modification, au moins superficielle, lorsqu'elle se trouve à 210°, au contact de la vapeur, car elle devient passive et n'est plus attaquée, même à la température ordinaire. Il est vraisemblable que cette passivité est due à la formation d'une couche invisible, tout à fait superficielle, mais cependant absolument continue d'oxyde anhydre, tandis que l'hydrate, moins adhérent, n'est pas protecteur. L'action immunisante de cet enduit cesse à 310°, température à laquelle l'aluminium, même non amalgamé, réagit sur la vapeur d'eau.

En résumé, l'action de l'aluminium légèrement amalgamé sur la vapeur d'eau est beaucoup plus complexe que celle du magnésium sur le même composé. Cela pour deux raisons :

1° en premier lieu, parce qu'il existe plusieurs variétés allotropiques de l'alumine anhydre, deux hydrates définis, et de l'eau d'adsorption retenue énergiquement (²);

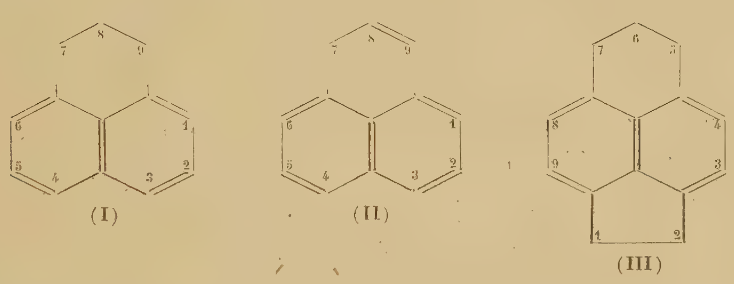
---

(²) H. B. Weiser et W. O. Milligan, *Journ. physic. Chemist.*, 36, 1932, p. 3010; voir également R. Ridgway, A. Klzin et O'Leary, *Transac. Electrochem. Soc.*, 70, 1936, 16 pages; Hackspill et Stempel, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 11, 1935, p. 1078; E. Stempel, *Thèse*, Strasbourg, 1929

2° par suite de la passivité conférée dans certaines conditions au métal, par une couche protectrice infiniment mince d'oxyde dont la nature n'a pu être déterminée.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur un nouveau type de carbure aromatique, l'acéphénalane et ses dérivés*. Note de MM. **Buu-Hoï** et **Paul Cagniant**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'étude des systèmes aromatiques condensés est d'une importance primordiale pour la connaissance des substances cancérigènes. Le méthylcholanthrène, par exemple, est un dérivé de l'acénaphtène (V). Un autre noyau intéressant à ce point de vue est celui du *phénalane* (I) ou dérivé hydrogéné du phénalène (II). Nous décrivons ici un nouveau carbure tétracyclique (III), qui dérive soit de (V) par adjonction d'un cycle hexagonal en 5.6, soit de (I) par l'introduction d'un cycle pentagonal



(I) (II) (III)

en 3.4. Nous proposons pour ce carbure le nom d'*acéphénalane* et, pour le noyau non saturé correspondant (IV), le nom de *déhydro*-5.6-*acéphénalane*. La méthode de synthèse de (III) consiste à partir du 5-bromo-

(IV) (V) (VI) (VII)

acénaphtène (VIII), dont on fait le magnésien qui réagit sur l'oxyde d'éthylène en donnant l'alcool 5-acénaphtyléthylique (IX). Le bromure (X) de cet alcool, condensé avec KCN, fournit le nitrile (XI) qui est saponifié en

acide 5-acénaphtyl-β-propionique (XII). La constitution de (X) a été fixée

| | R |
|---|---|
| (VIII) | Br |
| (IX) | $-(CH^2)^2OH$ |
| (X) | $-(CH^2)^2Br$ |
| (XI) | $-(CH^2)^2CN$ |
| (XII) | $-(CH^2)^2CO^2H$ |
| (XIII) | $-(CH^2)^3CO^2H$ |

(XIV)

par synthèse malonique, qui a conduit à l'acide 5-acénaphtyl-γ-butyrique (XIII) déjà préparé selon une autre méthode ([1]). Le chlorure de l'acide (XII) est cyclisé par $AlCl^3$ en 7-acéphénalanone (XIV), qu'une réduction par la méthode de Clemmensen transforme en (I). La cétone (XIV) est vivement colorée en jaune à l'état brut, mais devient totalement incolore à la suite de cristallisations répétées. Le chrysogène qui l'accompagne est la 7-acéphénalénone, qui correspond à l'une ou l'autre des formules (VI) et (VII); cette cétone non saturée provient de la déshydrogénation partielle de (XIV) sous l'action d'$AlCl^3$ au cours de la cyclisation. Nous l'avons obtenu à partir de (V) et du chlorure de l'acide cinnamique en présence d'$AlCl^3$ à chaud : le cinnamoylacénaphtène formé tout d'abord se cyclise en perdant son noyau benzénique. En raison de sa coloration jaune intense et de ses propriétés basiques accentuées, nous attribuons à la 7-acéphénalénone la structure quinonique (VII). Il est à remarquer par ailleurs que la 7-phénalanone, décrite par plusieurs auteurs ([2]) comme étant jaune (ce qui serait *a priori* extraordinaire du point de vue des relations entre la couleur et la structure moléculaire), est incolore quand elle est pure et débarrassée de son chrysogène, la 7-phénalénone (par épuisement de la solution benzénique à ClH concentré), ce qui concorde avec les travaux de Cook ([3]) et de Robinson ([4]).

*Mode opératoire.* — 1° (VIII) E 160°, a été préparé selon Graebe ([5]); 2° (IX) $C^{14}H^{14}O$ : une solution de 160g de (VIII) dans 500cm³ d'éther contenant 30g $C^2H^5Br$ est versée

---

([1]) Fieser et Peters, *J. Am. Chem. Soc.*, 54, 1932, p. 4373.

([2]) Meyer et Sieglitz, *Ber. d. chem. Ges*, 55, 1922, p. 1835; Darzens et Lévy. *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 502.

([3]) Cook et Hewett, *J. Chem. Soc.*, 1934, p. 365.

([4]) Robinson et Klyne, *ibid.*, 1938, p. 1991.

([5]) *Liebig's Ann.*, 327, 1903, p. 77.

goutte à goutte en 4 heures sur 18g Mg recouvert d'éther; on chauffe 6 heures au bain-marie, refroidit à — 10° et ajoute 40g d'oxyde d'éthylène dans 40cm³ d'éther; on laisse 6 heures et chasse l'éther vers 70° pendant 4 heures, puis traite comme d'habitude. On a 56 % de rendement en un solide $E_{0,9}$ 180°, fondant à $t°$ ordinaire, donnant une phényluréthane $C^{21}H^{19}O^{2}N$ qui cristallise de $C^{6}H^{6}$ en aiguilles soyeuses, F 161°; 3° (X) $C^{14}H^{13}Br$; on fait agir $PBr^{3}$ sur (IX) dissous dans $CCl^{4}$, $E_{0,8}$ 171°, F 75° (de l'alcool); 4° (XI) $C^{15}H^{13}N$, aiguilles brillantes, F 83° (de l'alcool); 5° (XII) $C^{15}H^{14}O^{2}$; on saponifie (XII) par KOH alcoolique à reflux 3 heures, fines aiguilles, F 189° (de $C^{6}H^{6}$), donnant avec $SOCl^{2}$ un chlorure d'acide $C^{15}H^{13}OCl$ sous forme de longues aiguilles (de $C^{6}H^{6}$ + ligroïne) F 104° (instantané); ce chlorure réagit sur $NH^{3}$ concentré en donnant l'amide $C^{15}H^{15}ON$, cristallisant de $C^{6}H^{6}$ sous forme de fines aiguilles, F 149°; 6° 5-acénaphtyléthyl-malonate d'éthyle $C^{21}H^{24}O^{4}$; (X) est condensé avec le malonate d'éthyle sodé dans l'alcool 4 heures à reflux; liquide visqueux, $E_{1,3}$ 220-230°; 7° (XIII); par saponification du malonate précédent et distillation on a un acide, F 148° (de $C^{6}H^{6}$), $E_{1,2}$ 215-220°, identique à celui de Fieser et Peters ([5]), et dont l'amide $C^{16}H^{17}ON$ cristallise de l'alcool sous forme de fines aiguilles soyeuses F 182°; 8° (XIV) $C^{15}H^{12}O$ : le chlorure de (XII), dissous dans $C^{6}H^{5}NO^{2}$, est additionné à 0° d'$AlCl^{3}$, on laisse une nuit, fait le vide sur la solution, et décompose comme d'ordinaire. Après distillation, on a un solide jaune, $E_{1}$ 195°-205, qui est cristallisé 5 fois dans l'alcool où il est peu soluble; on obtient des aiguilles soyeuses, incolores, F 194°, solubles en rouge dans $SO^{4}H^{2}$, donnant une oxime cristallisant de l'alcool en petites aiguilles, F 240° (inst.) et une semicarbazone très peu soluble dans l'alcool et se carbonisant vers 235-245°; 9° (III) $C^{15}H^{14}$; (XIV) est chauffé 48 heures avec Zn amalgamé + ClH en présence d'un peu de méthanol et de benzène; magnifiques aiguilles incolores, soyeuses, $E_{1,3}$ 168-170°, F 122° (de l'alcool), très soluble dans $C^{6}H^{6}$, stables à l'air et la lumière, donnant avec le 1.3.5-trinitrobenzène une combinaison moléculaire [aiguilles jaune cuivré, F 116° (de $C^{6}H^{6}$ + ligroïne)]; 10° (VII) $C^{15}H^{10}O$; préparé selon la méthode de Koelsch et Anthes ([6]) appliquée au naphtalène; fines aiguilles jaune foncé (de $C^{6}H^{6}$ + ligroïne), F 177-178° (inst.), donnant des solutions sulfuriques à fluorescence verte intense; la combinaison avec ClH (rouge orangé) est peu soluble.

Nous poursuivons ces recherches.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur un nouveau mode de préparation et quelques propriétés des éthers uréocarboniques.* Note de M. **Pierre Chabrier**, présentée par M. Marcel Delépine.

Nous avons montré ([1]) que les N-chlorocarbamates RO.CO.NHCl donnent des sels RO.CO.NClMe doués de remarquables aptitudes

---

([6]) *J. org. Chem.*, 6, 1941, p. 558.

([1]) *Comptes rendus*, **214**, 1942, p. 362

réactionnelles. Les réactions d'addition ont été étudiées dans la Note précédente, nous décrirons dans celle-ci celles dites de condensation.

Dans cet ordre d'idées, Folin (²) a montré que l'action des éthers isocyaniques sur les carbamates conduit aux allophanates, appelés encore *éthers uréocarboniques*,

$$RN.CO + NH^2.CO^2R^1 \rightarrow RNH.CO.NH.CO^2R^1.$$

Un peu plus tard, Mauguin (³) a signalé que l'on pouvait utiliser comme source d'éther isocyanique les amides bromés sodés :

$$RCO.NBrNa \rightarrow RN.CO + BrNa,$$

Le procédé que nous allons décrire se distingue des précédents par sa simplicité et les rendements élevés auxquels il conduit.

*Préparation.* — L'action du sel alcalin d'un N-chlorocarbamate sur les amides conduit aux éthers uréocarboniques. On peut admettre la suite des réactions suivantes :

(1) $R^1O.CO.NClNa + RCO.NH^2 \rightarrow R^1O.CONH^2 + RCO.NClNa,$

(2) $RCO.NClNa \rightarrow RNCO + ClNa,$

(3) $RN.CO + R^1O.CONH^2 \rightarrow RNH.CO.NH.CO^2R^1.$

La nature du milieu dans lequel s'effectue la réaction n'est pas indifférente. Le milieu benzénique convient particulièrement; dans certains cas on peut opérer même en milieu aqueux. En milieu alcoolique, les résultats sont plus complexes, parce que l'éther isocyanique transitoirement formé aux dépens de l'amide réagit, partie sur l'alcool pour donner un carbamate N-substitué, $RN.CO + R^1OH \rightarrow RNH.COOR^1$, partie sur l'uréthane, conduisant à l'éther uréocarbonique :

$$RN.CO + NH^2.CO^2R^1 \rightarrow RNH.CO.NH.CO^2R^1.$$

Ainsi l'amide nicotique, traité en milieu alcoolique par le sel de sodium du N-chlorocarbamate de méthyle, donne le nicotyluréocarbonate de méthyle $(C_5H_4N)$NH.CO.NH.CO²CH³ (F 218°) et le nicotylcarbamate d'éthyle $(C_5H_4N)$NH.CO²C²H⁵ (F 85°) déjà décrit par Curtius et Mohr (⁴).

(²) *Am. Chem. J.*, **19**, 1897, p. 323.
(³) *Ann. Chim. Phys.*, 8e série, **22**, 1911, p. 297.
(⁴) *Ber. d. chem. Ges.*, **31**, 1898, p. 2494.

La présence d'halogènes soit dans l'amide, soit dans le carbamate, n'est pas un obstacle à cette réaction. Ainsi la chloracétamide réagissant sur le sel de sodium du N-chlorocarbamate de méthyle, conduit au chlorométhyl-uréocarbonate de méthyle (F 168°) :

$$ClCH^2CO.NH^2 + CH^3O.CO.NClNa \rightarrow ClCH^2NH.CO.NH.CO^2CH^3 + ClNa.$$

De même l'action de la benzamide sur le sel de sodium du N-chlorocarbamate de β-chloroéthyle conduit au phényluréocarbonate de β-chloroéthyle (F 117°,5) :

$$C^6H^5CO.NH^2 + C^2H^4ClO.CO.NClNa \rightarrow C^6H^5NH.CO.NH.CO^2C^2H^4Cl + ClNa.$$

Ce mode de préparation des éthers uréocarboniques, appliqué aux monoamides simples aliphatiques ou aromatiques, paraît général et s'effectue avec de bons rendements, la formiamide toutefois conduit aux allophanates avec des rendements médiocres.

*Propriétés des éthers uréocarboniques.* — Soumis à l'action des alcalis ou des carbonates alcalins, ces composés sont saponifiés et conduisent au sel alcalin de l'acide uréocarbonique qui, traité par un acide, se dédouble en urée monosubstituée et gaz carbonique :

$$RNH.CO.NH.CO^2H \rightarrow RNH.CO.NH^2 + CO^2.$$

Cette réaction s'effectue avec d'excellents rendements et constitue un mode de préparation des urées monosubstituées paraissant général. Par amidification au moyen de l'ammoniaque, on obtient facilement les biurets substitués :

$$RNH.CO.NH.CO^2R^1 + NH^3 \rightarrow RNH.CO.NH.CONH^2 + R^1OH.$$

Si l'on traite un éther uréocarbonique par l'hydrate d'hydrazine, on obtient l'hydrazide correspondante :

$$RNH.CO.NH.CO^2R^1 + NH^2NH^2 \rightarrow RNH.CO.NH.CO.NH.NH^2 + R^1OH$$

que l'on peut considérer comme une alcoyl (ou aryl) carbamylsemicarbazide. Ce type de composé ne semble pas avoir été décrit.

Les alcoylcarbamylsemicarbazides se combinent aisément avec les aldéhydes et les cétones en donnant des alcoylcarbamylsemicarbazones :

$$RNH.CO.NH.CO.NHNH^2 + R^1CHO \rightarrow RNH.CO.NH.CO.NHN{=}CHR^1 + H^2O,$$

qui s'hydrolysent en milieu chlorhydrique en régénérant l'aldéhyde ou la cétone.

GÉOLOGIE. — *Sur l'origine sédimentaire de la structure* cone-in-cone. Note (¹) de M. **Antoine Bonte**, présentée par M. Lucien Cayeux.

La structure *cone-in-cone* existe dans de nombreuses formations géologiques, où elle se présente à l'intérieur de nodules et plus rarement sous forme de couche continue. Elle a été signalée principalement dans les sédiments paléozoïques, mais elle existe également dans le Crétacé. Je l'ai observée aussi, en lits continus, dans le Pliensbachien des Ardennes (Zone à *Astarte striatosulcata*) et dans le Muschelkalk de l'Hérault (Neffiès).

Plusieurs hypothèses ont été émises relativement à l'origine de cette structure; M. Cayeux, après les avoir successivement envisagées dans son important Mémoire sur les Roches carbonatées (p. 277), conclut en donnant une part prépondérante aux phénomènes dynamiques. Plus récemment, M. M.-E. Denayer (²) a tenté d'expliquer la formation des cônes par un processus de décompression locale.

Les hypothèses dynamiques ne semblent pas cependant pouvoir s'accorder avec certains faits, notamment, la localisation de cette structure particulière dans des nodules, à l'exclusion des schistes encaissants, et l'existence de lits plus ou moins continus; elle ne tient pas compte de la présence constante de matière organique au centre des gâteaux ou à la base des lits, cette matière organique n'existant pas, au moins en aussi grande abondance, au voisinage,

L'examen de nombreux nodules provenant des schistes à *Didymograptus balticus* et *D. deflexus* (« Schistes à gâteaux ») de l'Arenig moyen de la Montagne Noire m'a conduit à une explication qui semble pouvoir rendre compte de toutes les particularités de la structure *cone-in-cone*.

Sans insister sur la description des nodules, qui fera l'objet d'une étude détaillée, il est nécessaire cependant de préciser deux points qui ne semblent pas encore avoir été signalés : 1° les cônes se développent toujours de la périphérie vers le centre; ils sont en effet de grande taille et bien individualisés dans la zone externe, tandis qu'à l'approche du noyau, qu'ils n'atteignent pas toujours, ils sont petits et à peine marqués, pour s'estomper souvent dans une zone indifférenciée; 2° l'examen de la surface

(¹) Séance du 2 février 1942.

(²) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 2004.

et la nature de la gangue amènent à penser que les nodules ont été remaniés sur place, au cours d'une reprise pénécontemporaine, et ne se trouvent donc pas exactement dans leur gisement primitif.

Les gâteaux de l'Arenig sont généralement assez épais et l'existence de très nombreux cônes qui interfèrent masque le plus souvent la disposition originelle de ces derniers. L'observation des échantillons très plats est, par contre, extrêmement instructive.

Le nodule le plus typique que j'ai rencontré renferme un bel exemplaire de *Megalaspis*; il a un contour ovale conditionné par la forme même du fossile. La surface externe est ornée de nombreuses protubérances arrondies, plus ou moins en relief, qui correspondent à la base des cônes; un examen attentif permet de constater que certaines protubérances sont alignées et que ces alignements forment avec l'axe du nodule un angle qui est précisément celui des plèvres avec l'axe du fossile; d'autres sont alignées parallèlement à l'axe et correspondent exactement à la ligne de séparation des plèvres et de l'axe. Cette même ligne de séparation se manifeste aussi très nettement, dans l'arrangement des cônes, sur deux autres nodules.

Les caractères précédents s'observent sur la face du gâteau qui correspond à la partie ventrale. Du côté dorsal, on remarque surtout des alignements à la limite céphalothorax-abdomen et abdomen-pygidium; en outre, l'emplacement des yeux se traduit extérieurement par des groupements de cônes, qui ont une disposition arquée exactement moulée sur l'empreinte des yeux.

Tous ces faits indiquent à l'évidence, et les photographies que je publierai ultérieurement en feront foi, que la matière organique a joué un rôle de tout premier plan dans la réalisation de la structure *cone-in-cone*. Les organismes, à la suite d'un enfouissement rapide, se sont décomposés à l'intérieur du sédiment; les produits de décomposition, pour se dégager de l'enveloppe qui les contenait, ont emprunté les orifices de cette enveloppe et, de préférence, les orifices de grande taille. Il y a eu ainsi diffusion dans le sédiment encaissant et, par réaction chimique, concrétionnement autour du fossile.

Sans nier de façon absolue l'intervention, dans certains cas, de phénomènes dynamiques, il semble que la structure *cone-in-cone* résulte donc d'un simple concrétionnement, dans des circonstances tout à fait particulières, sous l'influence de phénomènes de diffusion dirigée, à partir d'éléments organiques en voie de décomposition.

Cette conclusion, qui s'imposait à la suite des observations précédentes,

devient indiscutable quand on fait intervenir les lois de la chimie physique, et M. R. Gay, à qui j'avais proposé cette solution, en a trouvé une explication théorique qui fait l'objet de la Note ci-dessous.

GÉOLOGIE. — *Théorie de la formation de la structure* cone-in-cone. Note de M. **Robert Gay**, transmise par M. Lucien Cayeux.

Dans la Note précédente, M. A. Bonte, a été amené, à la suite de nombreuses observations, à attribuer la formation de la structure *cone-in-cone* à la diffusion, au voisinage d'organismes en voie de fossilisation, de substances dues à l'altération de ces organismes au sein même du sédiment.

La diffusion doit pouvoir expliquer l'apparition des *cone-in-cone* dans tous les milieux où ils ont été observés, calcaire, dolomie, gypse, célestine, hématite, quartzites, charbons etc. (¹).

Le cas des schistes ordoviciens, étudié par M. Bonte, étant dès l'abord trop complexe (*cone-in-cone* quartzo-phylliteux) pour permettre une exposition claire de la théorie, nous développerons celle-ci dans le cas des *cone-in-cone* calcaires; le mécanisme sera le même pour toutes les formations cristallines (carbonates, hydroxydes, sulfates, sulfures) et pourra être étendu aux formations colloïdales (quartzites, charbons).

Nous allons montrer que l'existence d'un organisme, centre de diffusion *basique* (fermentation anaérobie), dans un dépôt calcaire où la concentration des ions $Ca^{++}$ est variable avec la profondeur, suffit, sous certaines conditions faciles à préciser, à expliquer la formation de *cone-in-cone* et leur croissance *de l'extérieur vers l'intérieur*, ainsi que M. Bonte a pu l'observer dans les galettes ordoviciennes (²).

L'organisme crée autour de lui un champ de diffusion des ions $CO_3''$ dont les nappes d'égales concentrations sont des sphères concentriques; ce champ est envahi par un champ de diffusion des ions $Ca^{++}$ caractérisé par des nappes $Ca^{++} =$ constante, planes et parallèles.

Une construction géométrique simple montre que la condition de précipitation de la calcite

$$[Ca^{++}].[CO_3''] \geqq S_{Ca} \ (^3)$$

---

(¹) L. Cayeux, *Les roches sédimentaires de France : Roches carbonatées*, 1935, pp. 275-286.

(²) Constante du produit de solubilité de la calcite.

est réalisée à l'intérieur d'une *forme conique* pointée dans la direction du centre organique et ouverte du côté des concentrations $Ca^{++}$ croissantes, à condition que le rapport du gradient de diffusion de $CO_3''(dr)$ au gradient de diffusion de $Ca^{++}(dx)$ soit constant et plus grand que 1.

Lorsque le champ de diffusion de $Ca^{++}$ progresse, ce cône calcaire *plein* se développe par la pointe, *de l'extérieur vers l'intérieur* par conséquent. Disons-le en passant, la structure qui se développe par ce mécanisme est une *structure stylolithique*.

Mais, dans le cas présent, le phénomène se complique du fait que nous nous trouvons dans un milieu colloïdal (vase argilo-calcaire chargée de matières organiques) : la cristallisation de la calcite, au lieu d'être continue, devient périodique; il se forme un système de cônes emboîtés qui n'est pas sans analogie avec les *anneaux de Liesegang*. La cristallisation est retardée et ne débute que lorsque la solution a atteint un certain degré de sursaturation :

$$[Ca^{++}].[CO_3''] = k\,S_{Ca} \qquad (k > 1).$$

Dans les conditions que nous venons de préciser, cette relation est réalisée sur une surface *conique*, intérieure à la surface

$$[Ca^{++}].[CO_3''] = S_{Ca}.$$

La cristallisation amorçée sur la première surface se propage vers la seconde; la précipitation sursaturante, qui se produit dans la zone conique interne, provoque un appel d'ions $Ca^{++}$ et $CO''$, qui sont fournis par la zone conique externe : dans cette zone la solution tend à devenir sous-saturante, la cristallisation est bloquée vers l'extérieur. Pour qu'elle se produise de nouveau, il faut attendre que le champ de diffusion des ions $Ca^{++}$ ait suffisamment progressé dans le champ de diffusion des ions $CO_3''$, pour que la condition $[Ca^{++}][CO_3''] = k\,S_{Ca}$ soit satisfaite. Ceci est réalisé sur une surface *conique* extérieure aux deux premières. Le phénomène continue à se propager de la sorte, en se rapprochant du centre organique.

Ce mécanisme rend facilement compte de toutes les particularités de structure des *cone-in-cone* : orientation commune des cônes, constance de l'angle d'ouverture des cônes d'une même génération, profils divers des cônes etc. Cependant les fines stries en gradins qui ornent l'intérieur des cônes restent sans explication.

Ainsi la structure *cone-in-cone* doit être rapportée à des phénomènes de diffusion au sein du sédiment : ceux-ci apparaissent immédiatement après le

dépôt, régis qu'ils sont par la fermentation des matières organiques qu'ils contiennent.

Ces phénomènes de diffusion, encore peu étudiés, fournissent l'explication de certaines formes particulières de concrétionnement parmi les oolithes et nodules, et celle de la structure dite stylolithique.

MYCOLOGIE. — *Étude d'un* Actinomyces *nouveau acidorésistant*, Actinomyces ondulans *n. sp.* Note (¹) de M. **Auguste Sartory**.

L'*Actinomyces* qui fait l'objet de cette Communication a été isolé, en même temps qu'un *Actinomyces* à pigment violet, des crachats d'un ouvrier ébéniste âgé de 38 ans suspect de tuberculose pulmonaire. Cet organisme avait été confondu avec le Bacille tuberculeux lors d'examens antérieurs aux nôtres. Dans les expectorations il se présente sous forme de bâtonnets droits et dissociés, acidorésistants évoluant sous l'influence du traitement iodé vers des formes filamenteuses ou pseudo-streptococciques à acidorésistance très marquée.

A côté de ces formes nous constatons des éléments de taille plus grande et nettement ondulés. Les cultures aérobies sont peu luxuriantes sur milieu liquide. L'observation microscopique a porté à la fois sur les milieux solides et sur les milieux liquides, afin d'établir la détermination exacte de la morphologie de l'*Actinomyces*. Sur milieu de Meyer (jus de pomme de terre + bouillon glycériné et maltosé, solidifié à la gélose) pH 5,8, 6,2, 6,8, nous observons à l'examen microscopique des éléments bacillaires très dissociés, ne présentant ni la moindre ramification ni l'aspect filamenteux. Diamètre entre $0^{\mu},4$ et $0^{\mu},5$ pour une longueur de $6\text{-}10^{\mu}$. Tous sont acido- et alcoolo-résistants. Cette propriété que possède l'*Actinomyces* dans le matériel pathologique est conservée sur les milieux artificiels solides quoique à un degré légèrement amoindri, et cela pendant quatre ou cinq générations, jusqu'au dépérissement de l'organisme. Nous avons encore observé des éléments acidorésistants dans des cultures âgées de cinq semaines.

*Milieux liquides*. — Les observations ont toutes été faites sur Sabouraud maltosé saccharosé et glucosé. Nous recourons à la technique classique, la boîte de Borrel pour culture de tissus, placée à + 37°. Après quelques

(¹) Séance du 2 mars 1942.

jours nous constatons le passage de la forme bacillaire atypique à la forme filamenteuse. Le quatrième jour, naissance de ramifications monopodiales s'insérant sur l'axe sous un angle approximatif de 60°. Les branches latérales ont le même calibre que le filament mère, toujours inférieur à $1^{\mu}$. Celles-ci ne sont pas droites, mais ondulées, de telle sorte que, s'il y a dissociation de l'organisme, comme cela arrive fréquemment, on voit ces formes ondulées en très grand nombre; elles avaient d'ailleurs attiré notre attention dans les crachats du malade et nous pensions à une impureté. Dans les cultures en goutte pendante âgées de 12 à 15 jours nous assistons à la dislocation du mycélium en éléments bacilliformes de longueur variable; des formes spiralées de 25 à $35^{\mu}$, des chaînettes d'arthrospores comprenant 7 à 8 éléments (dimension d'un élément 1 à $1^{\mu},2$ de diamètre). Formes pseudo-bacillaires, filaments, formes ondulées contiennent des granulations regardées par Neukirch, Lieske, Antonielli et nous comme des corpuscules nucléaires.

Placé dans une atmosphère pauvre en oxygène, notre organisme se révèle comme un anaérobie plutôt qu'un aérobie. Cultivé dans ces conditions il prend un développement luxuriant et très rapide (3-4 jours). Sur milieu de Sabouraud liquide (maltosé), il donne un voile tout d'abord fin et lisse, puis plissé et épais. Détaché par un choc brutal, la pellicule tombe au fond du liquide nutritif. Un nouveau voile se forme après 24-36 heures. Un troisième, un quatrième et même un cinquième voile peuvent ainsi se former sur eau peptonée et bouillon peptoné à 3 %.

Sur milieu solide (jus de pomme de terre gélosé ajusté au pH 7,3) nous observons au bout de 48 heures une petite colonie blanche, puis blanc crème après 4-5 jours, avec centre proéminent et plus foncé que le reste de la colonie (dimension 3 à $4^{mm}$). Au bout de 10 à 12 jours les colonies se rident, deviennent verruqueuses et se foncent, elles atteignent le quinzième jour $1^{cm},5$, les bords sont irréguliers et festonnés de couleur blanche. Mêmes constatations sur *milieu Sabouraud glucosé* gélosé. Sur *sérum de cheval*, milieu moins favorable, le sérum se pigmente en noir sur une assez large étendue; il est liquéfié vers le quinzième jour. Sur *albumine d'œuf*, mêmes constatations, liquéfaction du milieu au bout de 12 jours. Ces cultures ne dégagent aucune odeur. A l'*examen microscopique* la morphologie de l'organisme n'est pas différente de celle que nous avons décrite précédemment, sauf cependant que les formes ondulées sont encore plus accentuées et plus nombreuses. L'acidorésistance, nulle au début, apparaît vers le septième jour. Il y a coexistence de formes entièrement et partiellement

acidorésistantes. De l'ensemble de nos constatations nous tenons à signaler que notre *Actinomyces* devient capable, par privation d'oxygène, d'évoluer vers une forme Ziehl-positive, et ceci sur milieu de Sabouraud liquide simple, dépourvu de tout lipide. La meilleure récolte a été enregistrée avec un pH de 6,7 à 7. L'optimum cultural est + 37°. Notre organisme est sans action sur les nitrates, il ne donne pas d'indol, ne réduit pas le rouge neutre, mais produit de l'hydrogène sulfuré. L'amidon n'est pas liquéfié. Les sucres les mieux assimilés sont le saccharose et le maltose, puis viennent lactose et galactose; glucose et lévulose ne sont pas assimilés.

En raison de ses caractères morphologiques et de ses propriétés biologiques et de son pouvoir pathogène très marqué pour le Cobaye et le Lapin, nous considérons cette espèce comme nouvelle et nous proposons pour elle le nom *d'Actinomyces ondulans*. Nous publierons prochainement, dans un Mémoire séparé, le détail de nos expériences sur les animaux.

Disons, pour terminer, que le malade porteur de ce germe a été complètement guéri par un traitement ioduré, et cela au bout de 5 mois.

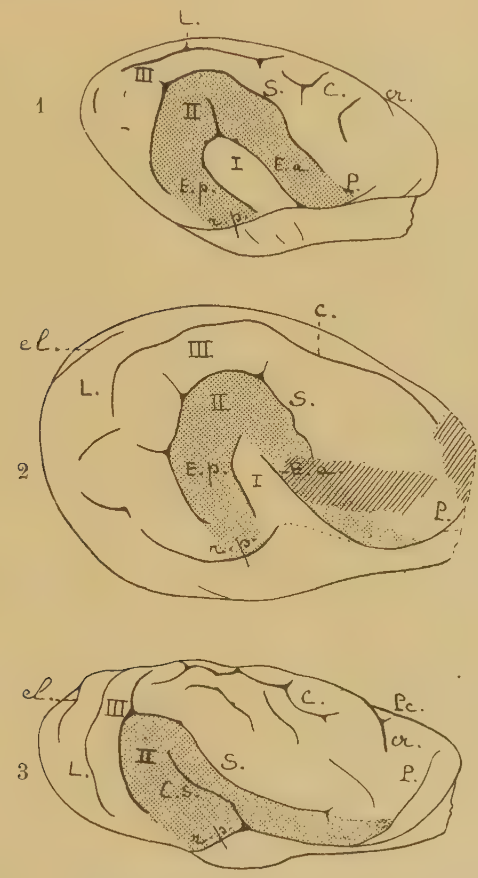
ANATOMIE COMPARÉE. — *Interprétation de la morphologie cérébrale du* Potamotherium Valetoni *E. Geoffroy*. Note de M^lle^ **Madeleine Friant**, présentée par M. Charles Pérez.

Le *Potamotherium Valetoni* E. Geoffroy a vécu, à l'Oligocène supérieur (Aquitanien), en France (Saint-Gérand-le-Puy, Allier) et en Allemagne (environs de Mayence et d'Ulm). Quelques autres espèces de *Potamotherium* ont été signalées dans le Miocène d'Amérique du Nord. Les caractères de sa dentition et de son squelette montrent que cet animal était un Carnassier adapté à la vie dans les eaux comme la Loutre (*Lutra*) actuelle, auprès de laquelle on le classe ordinairement. En 1833, E. Geoffroy Saint-Hilaire l'avait même identifié à une véritable Loutre.

Le cerveau du *Potamotherium Valetoni* n'a été décrit que par H. Filhol, en 1888, d'une façon sommaire et, surtout, au point de vue de sa forme d'ensemble. Grâce à M. C. Arambourg, j'ai pu étudier les deux seuls moulages endocrâniens naturels actuellement connus, qui proviennent de Saint-Gérand-le-Puy et appartiennent aux Collections Paléontologiques du Muséum.

Les sillons néopalléaux, assez nettement visibles sur ces moulages (*fig.*, 2), sont les suivants :

1° La scissure rhinale, dont la partie postérieure est la plus distincte; elle limite le *neopallium* du rhinencéphale.




Télencéphales de Carnassiers vus par leur face latérale droite. — *Au milieu* (2), *Potamotherium Valetoni* E. Geoffr., de l'Oligocène de Saint-Gérand-le-Puy (Allier). Moulage endocrânien. Coll. Pal. Muséum; les parties détériorées sont en hachures. — *En haut* (1), *Herpestes ichneumon* L. (Æluroïde-Viverridé), actuel. — *En bas* (3), *Lutra lutra* L. (Arctoïde-Mustélidé), actuelle. r. p., scissure rhinale, partie postérieure; E. a., *ectosylvia* antérieure; E. p., *ectosylvia* postérieure; P., *præsylvia*; S., *suprasylvia*; C., coronal; L., latéral; el., entolatéral; cr., crucial; Pc., précrucial; I, *gyrus arcuatus* I; II, *gyrus arcuatus* II (en grisé); III, *gyrus arcuatus* III. — Il faut noter que les cerveaux conservés dans le formol ont une tendance à s'affaisser, alors que les moulages endocrâniens reproduisent plus exactement la forme cérébrale. G. N.

2° L'*ectosylvia* (1[er] sillon arqué), divisée en deux parties : *ectosylvia* antérieure et *ectosylvia* postérieure. Il n'y a pas trace, semble-t-il, de *pseudosylvia* : il est, par suite, difficile de décrire un véritable *gyrus arcuatus* I, mais, on peut, du moins, en indiquer la place, entre l'*ectosylvia* et la scissure rhinale.

3° La *præsylvia*, qui prolonge, ici, l'*ectosylvia* antérieure.

4° La *suprasylvia* (2e sillon arqué), qui est continue et limite, avec l'*ectosylvia*, le *gyrus arcuatus* II. Elle sépare, avec la *præsylvia*, le territoire central du territoire périphérique.

5° Le corono-latéral (3e sillon arqué), également continu, comporte le coronal, en avant, et le latéral, en arrière. Avec la *suprasylvia*, il limite le *gyrus arcuatus* III.

6° L'entolatéral, situé vers l'arrière, en dedans du latéral.

Il n'y a pas de trace de crucial ni de précrucial.

Le rhinencéphale est moins bien conservé, sur nos exemplaires, que le *neopallium*, et il n'en sera pas question ici.

La surface néopalléale du *Potamotherium* est entièrement superficielle, ce qui est un caractère d'Æluroïde. Par l'aspect général de ses sillons, l'absence de *pseudosylvia* et de crucial, il s'agit, au point de vue cérébral, d'un Viverridé et, comme H. Filhol l'avait autrefois entrevu, c'est de l'*Herpestes* que le *Potamotherium* se rapproche le plus.

Il s'éloigne, par contre, notablement de la Loutre (*Lutra*) et de tous les Arctoïdes connus, dont la principale caractéristique cérébrale est de présenter une operculisation partielle du territoire central portant sur la *gyrus arcuatus* I et tendant, parfois, d'ailleurs, à s'étendre au delà.

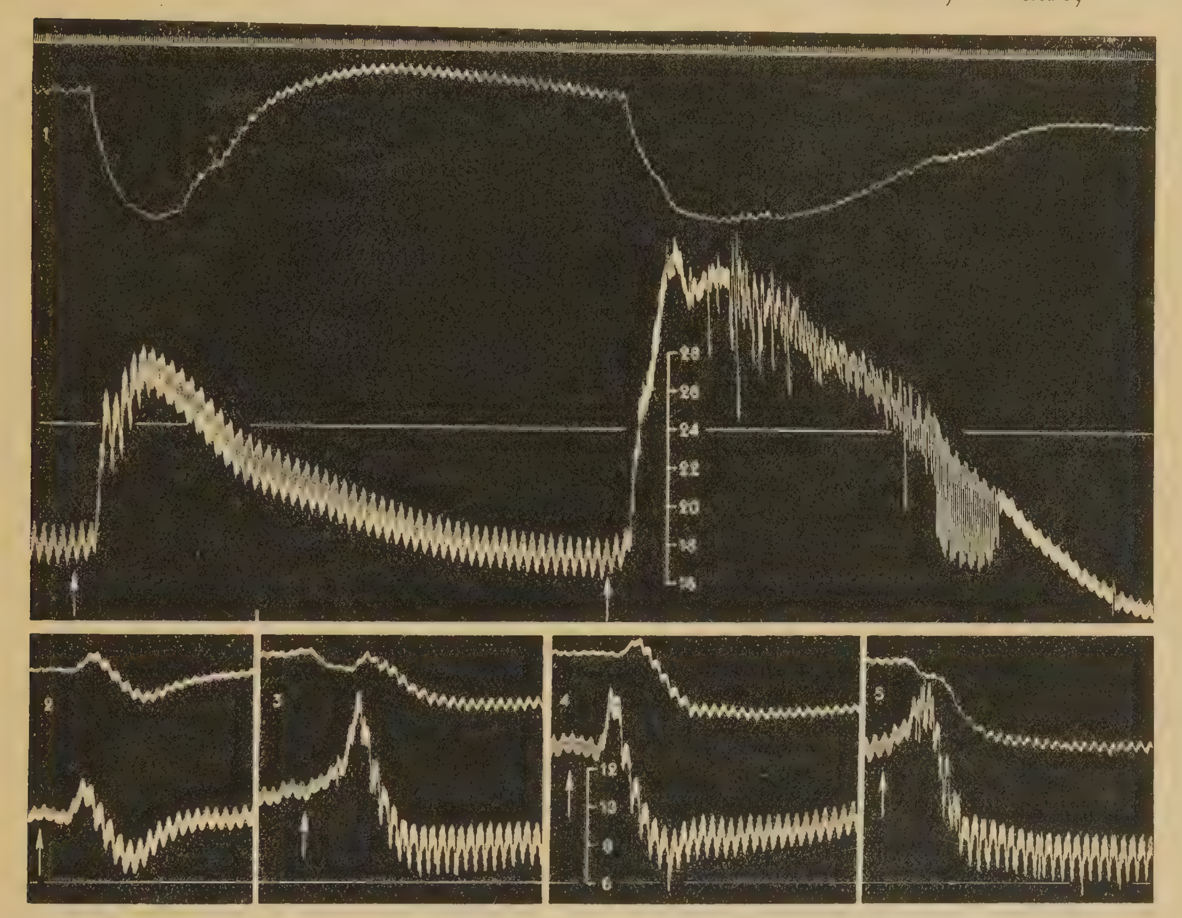
Alors que, par l'ensemble de son ostéologie, le *Potamotherium* paraît être un Arctoïde, sa morphologie cérébrale et, aussi, quelques autres caractères, dont ceux de la dentition, en font un Æluroïde. Il s'agit là d'une forme de transition entre deux groupes de Carnassiers, aujourd'hui très distincts : les Æluroïdes (Viverridés, Félidés, Hyænidés) et les Arctoïdes (Mustélidés, Ursidés, Procyonidés).

PHARMACODYNAMIE. — *Sur les effets vasculaires de la bufoténine introduite dans la circulation générale*. Note [1] de M. **Raymond-Hamet**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Bien que cet important principe actif du venin de Crapaud que Gabriel Bertrand et C. Phisalix ont nommé bufoténine ait été étudié par deux pharmacologistes, Handowsky et K. K. Chen, on ignore encore comment il agit sur les vaisseaux quand on l'injecte dans la circulation générale. Les expériences que nous avons pratiquées avec une bufoténine très pure,

(1) Séance du 2 mars 1942.

préparée et mise à notre disposition par H. Wieland lui-même, nous ont appris que l'hypertension provoquée par cette substance s'accompagne d'une forte et durable vasoconstriction. Elles nous ont montré, en outre,



Chien ratier à poils ras de $13^{kg},500$, anesthésié par le chloralose ($14^{cg}$ par kg), bivagotomisé au cou et soumis à la respiration artificielle. — $1^{re}$ ligne, temps en secondes; $2^{e}$ et $4^{e}$ lignes, variations du volume du rein enregistrées par l'oncographe d'Hallion et Comte par nous modifié; $3^{e}$ et $5^{e}$ lignes, modifications de la pression carotidienne enregistrées au moyen du manomètre à mercure. Aux points marqués par les flèches, on a injecté, en 1 ($1^{re}$ flèche), en 2 et en 4, $0^{mg},02$ d'adrénaline dissous dans $2^{cm^3}$ de soluté physiologique de chlorure de sodium; en 1 ($2^{e}$ flèche), en 3 et en 5, $2^{mg}$ de bufoténine dissous après neutralisation par l'acide chlorhydrique dilué dans $1^{cm^3}$ de soluté physiologique. L'animal a reçu dans la saphène, entre les tracés 1 et 2 : 6 injections successives de chacune $13^{mg},5$ de chlorhydrate de yohimbine dissous dans $13^{cm^3},5$ de soluté physiologique; entre les tracés 3 et 4 : $33^{mg},75$ de chlorhydrate d'harmalol en solution dans $6^{cm^3},75$ de soluté physiologique. Tracés réduits de moitié.

que, semblablement à celle qui suit l'injection d'adrénaline, l'hypertension causée par la bufoténine est transformée par la yohimbine en une hypotension, qui est augmentée par l'harmalol.

C'est ainsi que, dans l'expérience qui a fourni les tracés ci-dessus, l'injection de $0^{mg},02$ d'adrénaline avait initialement élevé la pression carotidienne de 187 à 282, donc de $95^{mm}$ de Hg, et produit une forte vasoconstriction du rein. Quand l'animal eut été soumis à l'action de $6^{mg}$ de yohimbine par kilogramme, la même dose d'adrénaline qu'auparavant, après avoir haussé passagèrement la pression carotidienne de 100 à 115, l'abaissa à 82, c'est-à-dire à $18^{mm}$ de Hg au-dessous du niveau originel, cependant que le volume du rein ne montrait plus que des variations à peu près parallèles à celles de la pression carotidienne. Le Chien ayant reçu ensuite $2^{mg},5$ d'harmalol par kilogramme, on constata, après l'injection d'une dose toujours égale d'adrénaline, d'une part que la pression carotidienne montait temporairement de 139 à 164, puis descendait à 89, c'est-à-dire à $50^{mm}$ de Hg au-dessous de son niveau primitif; d'autre part que le parallélisme subsistait entre le tracé oncographique et celui de la pression carotidienne.

Quant à l'injection de bufoténine, à la dose de $2^{mg}$, elle fut suivie : 1° au début de l'expérience, d'une hypertension de $160^{mm}$ de Hg faisant passer la pression carotidienne de 182 à 342, en même temps que d'une vasoconstriction rénale extrêmement marquée et très durable; 2° après le traitement par la yohimbine, d'une part d'une hausse fugace de la pression carotidienne la portant de 114 à 160, bientôt suivie d'une chute l'amenant à 90, c'est-à-dire à $24^{mm}$ au-dessous de son point de départ et la laissant pendant longtemps bien inférieure à ce qu'elle était auparavant; d'autre part d'une légère constriction vasculaire du rein précédant une diminution passive du volume de cet organe; 3° après l'administration d'harmalol, d'un côté, d'une faible hypertension entraînant très passagèrement la pression carotidienne de 140 à 166, puis d'une phase prolongée d'hypotension faisant descendre ladite pression jusqu'à un niveau minimal de 86, donc inférieur de $54^{mm}$ de Hg au niveau initial; d'un autre côté, d'une diminution du volume du rein active dans un premier stade très transitoire, passive dans un second stade très durable.

Puisque, quand on l'injecte dans la circulation générale, la bufoténine manifeste une très forte action vasoconstrictive se rapprochant de celle de l'adrénaline par quelques-uns de ses caractères pharmacologiques, tandis que, quand on la fait agir localement, elle n'a que de faibles effets vasculaires, très différents de ceux de l'adrénaline, on est en droit de penser que son action vasculaire est surtout indirecte et résulte principalement d'une stimulation de la sécrétion médullo-surrénalienne.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur la réduction de l'acide acétylacétique par le Bacille* M *de Lemoigne*. Note (1) de M. **Pierre Heitzmann**, présentée par M. Maurice Javillier.

Les travaux de Lemoigne (2) ont montré que l'acide β-hydroxybutyrique peut se former par voie bactérienne à partir du glucose. Cet acide est libéré au cours de l'autolyse des Bacilles M aux dépens d'un composé intracellulaire, le *corps Y*, polymère de l'acide crotonique.

Ayant poursuivi l'étude de cette glycolyse (3), nous avons obtenu des résultats négatifs dans la recherche d'une phosphorylation analogue à celle que produit la levure, mais nous avons trouvé que ces bacilles contenaient malgré cela une quantité appréciable de cozymase (diphosphopyridine nucléotide). Nous nous sommes alors demandé si le Bacille M n'était pas capable de réduire l'acide acétylacétique pour donner de l'acide β-hydroxybutyrique. Friedmann (4) avait montré que la levure en présence du sucre était capable d'accomplir cette réduction, mais l'acide β-hydroxybutyrique ainsi formé, à l'inverse de celui contenu dans l'urine des diabétiques, déviait à droite le plan de polarisation de la lumière. Si cet auteur décelait à côté de cet acide de l'acide lactique, il attribuait la présence de ce dernier à un bacille lactique contenu dans la levure de boulangerie du commerce qu'il utilisait. Il n'examina pas le métabolisme concomitant du glucose.

Nous avons trouvé qu'en l'absence d'oxygène et en présence de glucose, le Bacille M réduit l'acide acétylacétique pour donner de l'acide β-hydroxybutyrique gauche; cette réduction est particulièrement intense lorsque l'on opère à pH 7. On peut ainsi, par addition de bicarbonate de sodium, mesurer cette activité par le dégagement d'anhydride carbonique dû à l'acidité formée; car, en présence de glucose seul ou d'acide acétylacétique seul, le Bacille M ne développe pas plus d'acidité que celle qui est libérée par autolyse sans substrat.

---

(1) Séance du 2 mars 1942.

(2) *Comptes rendus*, 176, 1923, p. 1761; *Ann. Inst. Pasteur*, 39, 1925, p. 144; 41, 1927, p. 148.

(3) *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 23, 1941, p. 453.

(4) *Bioch. Z.*, 243, 1931, p. 125; 244, 1932, pp. 42 à 75.

Nous avons identifié, parmi les produits de transformation du glucose, l'acide lactique et l'acide acétique.

L'acide lactique a été séparé de l'acide β-hydroxybutyrique par simple chauffage sous vide. Dans ces conditions ce dernier se transforme en acide crotonique qui est volatil et l'acide lactique restant se polymérise et donne des lactides ([5]) à partir desquels on régénère l'acide par simple hydrolyse. Nous en avons fait le sel de zinc.

L'acide acétique a été identifié par une courbe de Duclaux.

Pour effectuer des mesures comparatives, nous utilisons des bacilles cultivés sur moût de bière gélosé et lavés deux fois à froid à l'aide d'une solution isotonique de KCl à 0,9 %. Nous comparons la composition, après élimination des bacilles par centrifugation, de l'émulsion initiale à l'émulsion obtenue après incubation à 31° sous atmosphère d'azote à 10 % de $CO^2$. L'acidité libérée est mesurée par la méthode de Warburg.

Pour $1^g$ de bacilles frais lavés deux fois avec KCl 0,9 %, on ajoute $3^{cm^3}$ KCl 0,9 %, $3^{cm^3}$ eau, $2^{cm^3}$ bicarbonate de sodium 5 %, et soit $2^{cm^3}$ eau, soit $1^{cm^3}$ eau plus $1^{cm^3}$ glucose 10 %, soit $1^{cm^3}$ eau plus $1^{cm^3}$ acétylacétate de potassium 0,94 M/1, soit $1^{cm^3}$ glucose 10 % plus $1^{cm^3}$ acétylacétate de potassium 0,94 M. Durée de l'incubation, 5 heures 45 minutes.

| Substrat ajouté par cm³ d'émulsion....... | Néant. | Glucose. | Acét. ([a]). | Gl. + Acét. ([b]). |
|---|---|---|---|---|
| Acidité libérée en cm³ $CO^2$.............. | 0,44 | 0,51 | 0,48 | 2,93 |
| Glucose disparu (en mg)................ | – | 1,34 | – | 7,52 |
| Acide acétylacétique disparu (en mg)..... | – | – | 1,5 | 4,76 |
| » lactique formé (en mg)........... | 0,113 | 0,87 | 0,05 | 4,77 |
| » β-hydroxybutyrique formé (en mg). | 0,493 | – | – | 4,85 |
| » acétique formé (en mg).......... | – | – | – | 1 |

([a]) Acétylacétate. ([b]) Glucose + Acétylacétate.

Faire un bilan exact de l'oxydoréduction se heurte à ce que l'autolyse n'est certainement pas la même dans tous les cas. Celle-ci correspond à une perte d'activité des bacilles et par conséquent à la désintégration des systèmes enzymatiques. Sans substrat, l'acide β-hydroxybutyrique formé est seulement le quart de l'acidité mesurée.

Néanmoins, l'examen des chiffres obtenus montre qu'en l'absence d'oxygène, pour qu'il y ait une acidité libérée plus forte que dans l'autolyse, il

([5]) Jungfleisch et Godchot, *Comptes rendus*, 140, 1905, p. 502.

faut la présence simultanée de glucose et d'acétylacétate. C'est seulement dans ce cas que l'on observe une disparition notable de ces deux substrats. En première approximation il disparaît une molécule de glucose pour une molécule d'acétylacétate, dont la réduction est liée à la formation d'acide lactique à partir du glucose.

La séance est levée à $15^h 45^m$.

A. Lx.

---

## *ERRATA.*

—

(Séance du 3 novembre 1941.)

Note de M. *Frédéric Diénert*, Méthode différentielle de prospection électrique du sous-sol :

Page 626, ligne 14, *au lieu de* $dV' = K\rho I'$, d'où $dV/dV' = (f/C') \times (I'/I)$, *lire* $dV' = K.\rho.I$, d'où $dV/dV' = (\rho/\rho') \times (I/I')$ ; ligne 2 en remontant, *lire*

$$\frac{\rho^i}{\rho} = \frac{R - R'}{r - r'} \times \frac{M'}{M} \times \frac{M + N}{M' + N'}.$$

(Séance du 9 février 1942.)

Note de M. *Yves Deux*, Déshydratation sulfurique du distyrylglycol symétrique. Formation du phényl-1 styryl-3 butane-2 al, par transposition hydrobenzoïnique suivie du déplacement d'une double liaison :

Page 270, pour la formule du milieu le CHO doit être placé à la fin de la formule. Voici le passage rétabli :

$$(C^6H^5{-}CH{=}CH{-}CHOH)^2 \xrightarrow{-H^2O} (C^6H^5{-}CH{=}CH)^2\overset{\displaystyle CHO}{\overset{|}{CH}} \rightarrow \begin{matrix} C^6H^5{-}CH{=}CH \\ C^6H^5{-}CH^2{-}CH \end{matrix}\!\!\gg\!\overset{\displaystyle CHO}{\overset{|}{C}}$$

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

---

### OUVRAGES REÇUS PENDANT LES SÉANCES DE FÉVRIER 1942.

État français. Gouvernement général de l'Algérie. Service cartographique. Service des forêts. *Carte forestière de l'Algérie et de la Tunisie. Notice*, par PAUL DE PEYERIMHOFF. Alger, Imprimerie-Papeterie Baconnier Frères, 1941 ; 1 vol. 27$^{cm}$.

*Les parodontoses pyorrhéiques ou pyorrhées alvéolaires*, par CHACTAS HULIN. Paris, Raymond Foulon, 1941 ; 1 vol. 24$^{cm}$.

*L'organisation scientifique du travail et deux questions d'actualité*, par ROBERT SATET. *Claude Bernard et la méthode scientifique, par* XAVIER BOULENGER. *L'effort humain à travers les âges*, par ROBERT LELONG. *Points de vue à envisager pour organiser une entreprise*, par GEORGES BÉQUART. Allocutions prononcées à la séance d'ouverture de la huitième session (promotion Claude Bernard) de l'École d'organisation scientifique du travail, suivies de quelques extraits de HENRY LE CHATELIER : *De la méthode dans les sciences expérimentales*. Paris, Eost, 1942 ; 1 fasc. 21$^{cm}$.

*Franges au voisinage de la discontinuité* K *des rayons* X, par CONSTANTIN KURYLENKO. Paris, Jouve et C$^{ie}$, 1939 ; 1 vol. 24$^{cm}$ (présenté par M. Ch. Mauguin).

Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques. *Étude expérimentale de la diffusion des rayons* X *par les cristaux*, par JEAN LAVAL. Paris, 1939 ; 1 vol. 23$^{cm}$ (présenté par M. Ch. Mauguin).

Que sais-je ? *La sexualité*, par LOUIS GALLIEN. Paris, Presses universitaires de France, 1941 ; 1 vol. 17$^{cm}$,5 (présenté par M. M. Caullery).